

---

---

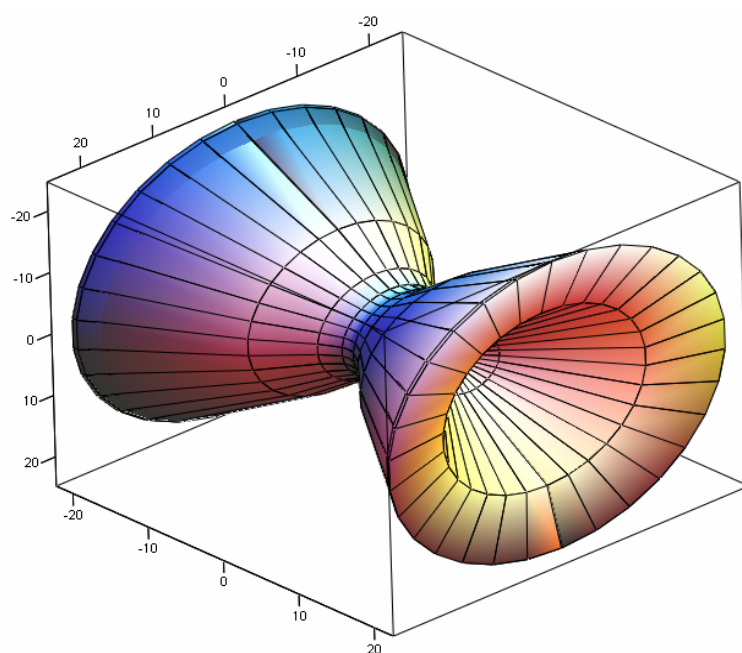
Г.Г. Литвинский



Аналитическая  
теория прочности  
горных пород и массивов

---

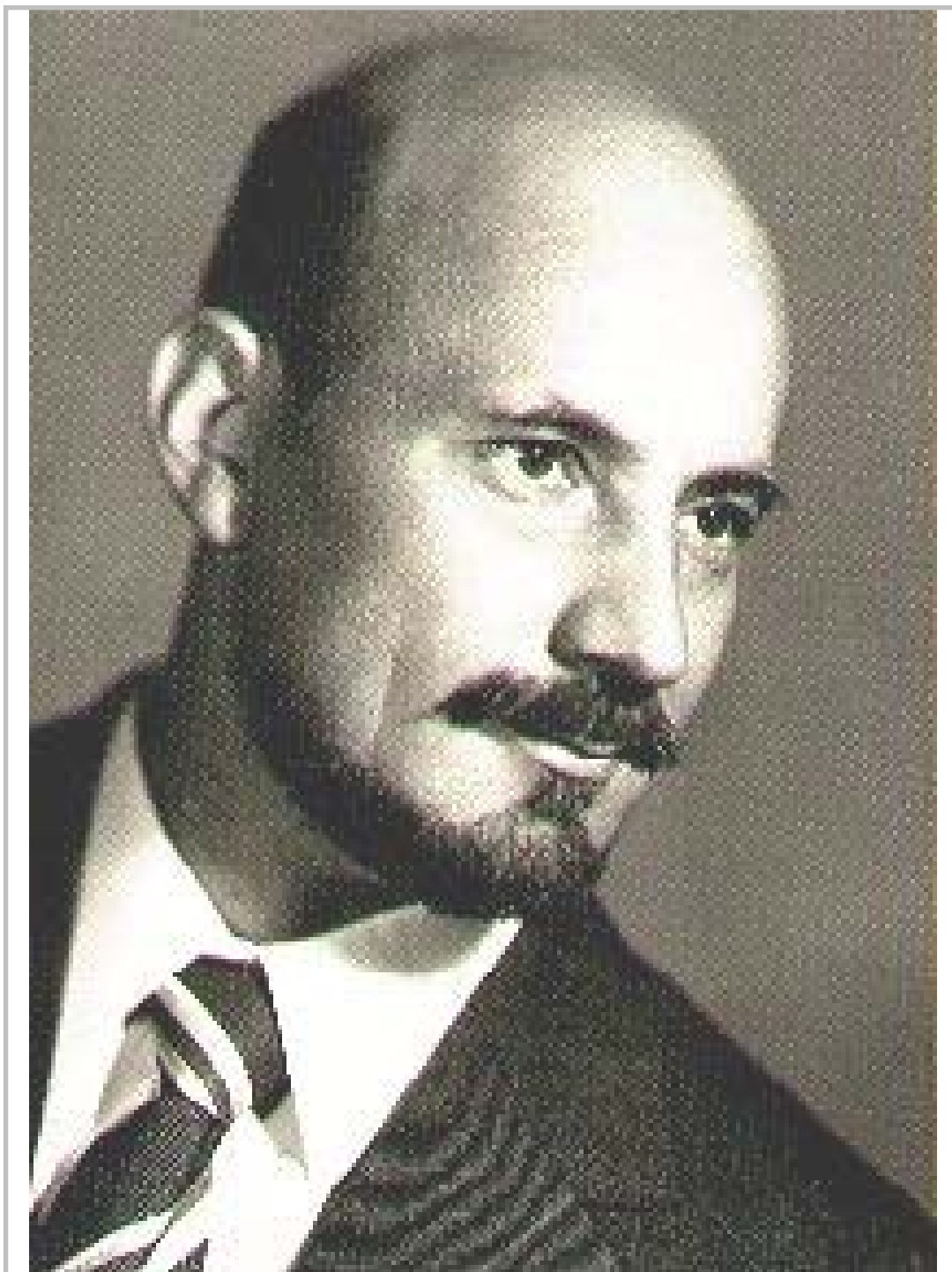
---



МОНОГРАФИЯ

---

---



**Проф. Литвинский Г.Г.**  
*(1979 г. - защита докторской диссертации)*

**Министерство образования и науки Украины  
Донбасский государственный технический университет**

**Г.Г. ЛИТВИНСКИЙ**

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
ПРОЧНОСТИ  
ГОРНЫХ ПОРОД И  
МАССИВОВ**

**Алчевск 2008**

УДК 620.10: 539.3/.8: 622.83  
ББК 33.1

Л 641

*Рекомендовано ученым советом ДонГТУ  
(протокол № 9 от 30.05.08)*

**Рецензенты:**

**А.В. Анциферов** - докт. техн. наук, проф., директор Украинского научно-исследовательского и проектного института горной геологии, геомеханики и маркшейдерского дела УкрНИМИ (г. Донецк)

**Б.М. Усаченко** - докт. техн. наук, проф., заведующий отделом института геотехнической механики (ИГТМ) Национальной академии наук Украины (г. Днепрпетровск);

**А.Н. Шашенко** - докт. техн. наук, проф., заведующий кафедрой строительных геотехнологий и конструкций Национального горного университета (г. Днепрпетровск);

**Литвинский Г.Г.**

Л 641      Аналитическая теория прочности горных пород и массивов. – Монография/ДонГТУ. –Донецк: Норд-Пресс, 2008. – 207 с.

ISBN 978-966-380-230-5

В монографии дан анализ существующих теорий прочности и изложена новая, - аналитическая, - теория прочности структурно неоднородных и трещиноватых материалов, в первую очередь – горных пород и массивов. Решена проблема масштабного эффекта, обоснована его связь с особенностями структурного строения массива, показана зависимость масштабного фактора прочности от напряженного состояния. Приведено сопоставление теории и эксперимента.

Книга предназначена для широкого круга научных и инженерных работников горной и строительной промышленности, будет полезна для студентов старших курсов, магистров и аспирантов горных вузов.

**УДК 620.10: 539.3/.8: 622.83  
ББК 33.1**

© Г.Г. Литвинский, 2008

© Дизайн обложки А.В. Козачишин, 2008

© Норд-Пресс, 2008

# Оглавление

|                                                                                   |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Перечень условных обозначений .....                                               | 7          |
| ВВЕДЕНИЕ .....                                                                    | 8          |
| <b>1 ОБЗОР ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ .....</b>                                             | <b>11</b>  |
| 1.1 АНАЛИЗ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ .....                                                 | 11         |
| 1.1.1 Классические теории прочности .....                                         | 12         |
| 1.1.2 Современные теории прочности .....                                          | 18         |
| 1.1.3 Теории прочности горных пород .....                                         | 27         |
| 1.2 Прочность в МЕХАНИКЕ ТРЕЩИННОГО РАЗРУШЕНИЯ .....                              | 46         |
| 1.3 ТРЕБОВАНИЯ К ТЕОРИЯМ ПРОЧНОСТИ .....                                          | 50         |
| <b>2 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ .....</b>                                     | <b>54</b>  |
| 2.1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ .....               | 54         |
| 2.1.1 Формальные принципы построения теории прочности .....                       | 54         |
| 2.1.2 Об основополагающих предпосылках теории прочности .....                     | 55         |
| 2.1.3 Физические процессы роста трещин при разрушении .....                       | 61         |
| 2.1.4 Сущность новой теории прочности .....                                       | 64         |
| 2.2 ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ ТРЕЩИНОВАТЫХ МАТЕРИАЛОВ .....                                | 68         |
| 2.2.1 Закономерности разрушения трещиноватых массивов .....                       | 72         |
| 2.3 ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД И МАССИВОВ .....                          | 78         |
| 2.3.1 Прямые задачи построения паспорта прочности .....                           | 78         |
| 2.3.2 Непрямые задачи прочности горных пород .....                                | 88         |
| 2.4 ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОЧНОСТИ МАССИВОВ .....                             | 94         |
| 2.4.1 Классификация пород по прочностным свойствам .....                          | 94         |
| 2.4.2 Численное моделирование прочности горных пород .....                        | 98         |
| <b>3 ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД .....</b>                      | <b>102</b> |
| 3.1 Прочность СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ПОРОД И МАССИВОВ .....                      | 103        |
| 3.1.1 Параметры трещиноватости горных пород .....                                 | 103        |
| 3.1.2 О параметрах и классификации поверхностей ослаблений .....                  | 105        |
| 3.1.3 Полярная диаграмма прочности при одной трещине .....                        | 106        |
| 3.1.4 Прочность массива с несколькими поверхностями ослабления .....              | 112        |
| 3.2 ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ КУСОЧНО НЕОДНОРОДНЫХ ПОРОД И МАССИВОВ .....            | 134        |
| 3.2.1 Теория прочности микронеоднородных материалов .....                         | 134        |
| 3.2.2 Методика определения прочностных свойств микронеоднородного материала ..... | 144        |
| 3.3 МАСШТАБНЫЙ ЭФФЕКТ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ МАССИВОВ .....                      | 147        |
| 3.3.1 Дефиниции феномена масштабного эффекта .....                                | 149        |

|          |                                                                          |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3.2    | <i>Описание неоднородностей горного массива .....</i>                    | <i>152</i> |
| 3.3.3    | <i>К основам структурной геомеханики.....</i>                            | <i>157</i> |
| 3.3.4    | <i>Исследование масштабногo фактора прочности .....</i>                  | <i>161</i> |
| <b>4</b> | <b>ЭКСПЕРИМЕНТ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ .....</b>                | <b>165</b> |
| 4.1      | АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ПРИ ИСПЫТАНИИ ПОРОД В СТАБИЛОМЕТРАХ .....      | 165        |
| 4.2      | ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАСПОРТОВ ПРОЧНОСТИ ПО ИСПЫТАНИЯМ ПОРОД В СТАБИЛОМЕТРЕ ..... | 167        |
|          | <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>                                                  | <b>175</b> |
|          | <b>К 70-ЛЕТИЮ ПРОФ. ЛИТВИНСКОГО Г.Г. ....</b>                            | <b>187</b> |
|          | <b>ИЗОБРЕТЕНИЯ ПРОФ. Г.Г. ЛИТВИНСКОГО.....</b>                           | <b>192</b> |
|          | <b>ПОИСКОВЫЕ КОНСТРУКТОРСКИЕ РАЗРАБОТКИ .....</b>                        | <b>198</b> |
|          | <b>ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ.....</b>                                            | <b>211</b> |

## **Перечень условных обозначений**

|                              |                                                                       |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\sigma_i$                   | главные напряжения на площадке с индексом $i=1,2,3$ , Па;             |
| $\sigma_p; \sigma_c$         | прочность при одноосном растяжении и сжатии, Па;                      |
| $\sigma_{on}$                | предельное значение напряжения, Па;                                   |
| $\nu$                        | коэффициент Пуассона материала;                                       |
| $E, G$                       | модули упругости Юнга и сдвига, Па;                                   |
| $\sigma_n$                   | нормальное напряжение на площадке с нормалью $n$ , Па;                |
| $\tau_{nt}$                  | касательное напряжение на площадке с нормалью $n$ , Па;               |
| $f, \rho$                    | коэффициент и угол трения;                                            |
| $\sigma_{окт}$               | октаэдрическое нормальное напряжение, Па;                             |
| $\tau_{окт}$                 | октаэдрическое касательное напряжение, Па;                            |
| $\theta_1; \theta_2$         | I и II-й обобщенные инварианты тензора напряжений, Па;                |
| $I_{11}; I_{22}$             | I и II-й основные инварианты тензора напряжений, Па;                  |
| $\mu_\sigma$                 | коэффициент Лодэ вида напряженного состояния, $-1 < \mu_\sigma < 1$ ; |
| $\gamma$                     | плотность поверхностной энергии берегов трещины, Дж/м;                |
| $k_I, k_{II}, k_{III}$       | коэффициенты интенсивности напряжений;                                |
| $\varphi, \rho$              | угол внутреннего трения породы, рад.;                                 |
| $\varphi_c$                  | угол внутреннего трения породы при одноосном сжатии;                  |
| $\sigma_o, \tau_o$           | когезии разрыва и сдвига, МПа                                         |
| $\alpha$                     | параметр хрупкости в аналитической теории прочности;                  |
| $T$                          | абсолютная температура, град;                                         |
| $k$                          | - постоянная Больцмана, Дж/град;                                      |
| $\psi, \omega$               | сплошность и поврежденность;                                          |
| $\omega_o$                   | поврежденность, равная площади открытых трещин;                       |
| $\omega_s$                   | поврежденность, равная площади закрытых трещин сдвига;                |
| $\kappa = \tau_o / \sigma_o$ | коэффициент когезии                                                   |
| $V_b$                        | объем структурного блока массива горных пород;                        |
| $b_1, b_2, b_3$              | размеры структурного блока массива;                                   |
| $l_1, l_2$                   | средние размеры трещины в структурном блоке                           |
| МТДТ                         | механика твердого деформируемого тела                                 |
| НДС                          | напряженно-деформированное состояние                                  |
| МЭ                           | масштабный эффект                                                     |
| МФ                           | масштабный фактор                                                     |

## ***ВВЕДЕНИЕ***

Современное развитие техники и технологии горной промышленности немыслимо без повышения качества и надежности не только конструкций машин, но и горных выработок. Поэтому такое большое значение имеет проблема адекватного описания механического поведения (главным образом прочности при разных типах нагружения) различных материалов, горных пород и массивов при подземном строительстве и добыче полезных ископаемых.

Проблема определения прочности горных пород была и есть предметом внимания многих исследователей. Во второй четверти XIX столетия из работ зарубежных и отечественных ученых в науке о прочности начали формироваться новые подходы к оценке несущей способности материалов и конструкций. Вместо начального, часто умозрительного, постулирования возможных условий разрушения материала, большое значение начали придавать изучению особенностей самого процесса разрушения, главным образом закономерностям роста трещины и условий стабильности ее пребывания в материале. Это направление в теории прочности стали называть механикой разрушения (А. Гриффитс, Э. Орован, Дж. Ирвин, А.Ф. Иоффе, Н.Н. Давиденков, С.Н. Сурков и др.). Но до настоящего времени эти основные исследования не получили надлежащего применения в горном деле главным образом из-за большой сложности расчетов и их неприменимости к неоднородным горным породам и массивам. Тоже можно сказать и о применении классических теорий прочности для горных пород, к которым можно отнести теорию наибольших деформаций, теорию наибольших касательных напряжений, энергетическую теорию и др.

В то же время в горной практике начала широко применяться теория прочности Кулона-Мора, которая довольно удовлетворительно описывает прочностные свойства породы в виде криволинейного паспорта прочности на диаграмме О. Мора. Но попытки дать аналитическое обоснование форме и параметрам паспорта прочности горных пород были неудачными и остались лишь в виде набора математических формул, которые так и не нашли своего практического применения (исследования М.М. Протодяконова-младшего, К.В. Руппенейта, ИГД им. А.А. Скочинского, ВНИИМИ, Донуги и т.д.). Работы зарубежных исследователей (Бенявского, Хоека, Брауна) привели к более удачным критериям прочности горных пород, но это были главным образом ско-



рее эмпирические, чем теоретические результаты, поэтому они имели ограниченное значение.

Основные трудности при изучении прочности, по нашему мнению, были обусловлены тем, что не принимались во внимание процессы развития в материале к началу его разрушения микроповреждений разного типа. Кроме того, известные теоретические подходы к описанию прочности материалов, в том числе и горных пород, базируются главным образом на алгебраическом подходе. Основные усилия исследователей были сосредоточены на поиске криволинейной поверхности, наиболее соответствующей паспорту прочности, а не на исследовании главных объектов, ответственных за разрушение материала – микроповреждений сдвигового (главным образом) и разрывного типов. В этом основная причина такого неудовлетворительного уровня теоретических обоснований теорий прочности. Эти трудности и противоречия снимает новая, разработанная в ДонГТУ, теория прочности, получившая название аналитической.

Основной целью выполненных исследований является разработка научных основ теории прочности структурно неоднородных материалов, в первую очередь - горных пород и массивов. Для этого были изучены основные параметры, которые влияют на прочность и закономерности разрушения, обусловленные существованием разного типа трещиноватости и поврежденности (сдвиговой и разрывной) в материале. Главным отличием нового исследования прочностных свойств материала (горной породы) являлся отказ от алгебраического подхода к формулированию базовых уравнений паспорта прочности, который повсеместно применяется, и вместо этого переход к описанию уравнений прочности с использованием дифференциальных уравнений. Такой подход позволил сформулировать и поставить новые задачи теории прочности, в частности - решить проблему прочности микронеднородных горных пород с позиций реономной микромеханики деформирования и разрушения материалов, которая разрабатывалась в ДонГТУ.

Выполненные исследования идейно связаны с ранее проведенными в ДонГТУ исследовательскими работами по созданию научных основ реономной микромеханики деформирования и разрушения материалов. В первую очередь, следует отметить главную идею этой работы, которая заключается в объяснении всех механических процессов, происходящих в материале при его нагружении с единых позиций роста и

залечивания композиций сдвиговых и разрывных микротрещин. При этом первичными являются процессы возникновения и залечивания трещин сдвига, а закономерности разрушения материала в основном предопределяются соотношением сухого и жидкостного трения на площадках сдвига. Эта идея оказалась настолько плодотворной, что позволила перейти к разработке основ аналитической теории прочности, чему посвящена данная работа.

Исследования проводились по гранту Министерства науки и образования Украины в рамках госбюджетной научно-исследовательской работы.

Автор хочет выразить искреннюю благодарность всем исполнителям данной научно-исследовательской работы, а особенно – к.т.н. С.А. Курману за творческое участие в разработке компьютерных алгоритмов и оформлении результатов исследований, высказать свою признательность профессорам В.Ж. Аренсу, Л.В. Ершову, Г.П. Черепанову, (МГГУ, Москва), А.Г. Протосене (СПб ГГУ, Санкт-Петербург) за полезные обсуждения проблем механики и горной науки.

Автор далек от мысли, что в данной работе содержатся только истины в последней инстанции. И если по поводу приоритета тех или иных закономерностей и утверждений, сделанных автором, у читателя вполне возможны сомнения, то все сделанные ошибки и упущения в данной работе, бесспорно, принадлежат автору, поэтому он примет с благодарностью критические замечания и пожелания по данной проблеме, которые можно направить на адрес электронной почты [ligag@ya.ru](mailto:ligag@ya.ru).

# 1 ОБЗОР ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ

## 1.1 АНАЛИЗ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ

Общепринято считать, что прочность – это свойство материала сохранять свою сплошность при деформации в процессе нагружения. Однако недостатком этого определения является подмена понятий, а именно, прочности - сплошностью, которая в свою очередь требует определения. Поэтому альтернативное определение прочности можно сформулировать так: прочность – это свойство материала сопротивляться в процессе деформирования возникновению в нем трещин. Отсюда становится понятным, что деформирование материала без возникновения трещин – это один из видов течения (вязкое, пластическое и т.д.).

Нагрузки, при которых материал переходит в *предельное состояние*, связанное с бурным возникновением трещин и нарушением сплошности среды, называют *предельными*. Критерий прочности (вытекающий из той или иной теории прочности) представляет собой развернутую запись предельного условия прочности в виде явно или неявно заданной зависимости напряженно-деформированного состояния материала и его механических свойств.

Развитие теории прочности в механике твердого деформируемого тела восходит к истокам доисторического зарождения технологической составляющей человеческой цивилизации. Однако научные основы теории прочности, которые характеризуются логическим обоснованием и доказательным характером, были впервые заложены Галилео Галилеем в 15 в., когда он предложил производить расчеты изгибаемых балок на основе опытных данных и предположения, что они разрушаются от максимальных растягивающих усилий. Начиная с этого времени в тесной связи с развитием основ механики твердого деформированного тела (МТДТ), - теории упругости, пластичности и ползучести, - происходило развитие науки о прочности материалов.

В настоящее время существует ряд достаточно глубоких и обстоятельных обзоров этапов развития и становления различных теорий прочности, - от классических до современных [1-7 и др.]. Поэтому нет необходимости детально рассматривать особенности каждой из теорий прочности, мы остановимся на главных идеях, используемых для их по-

строения, сопровождая их критическими замечаниями с позиций предлагаемой новой теории прочности.

### 1.1.1 Классические теории прочности

Следуя работам [1,3 и др.], среди существующих теорий прочности можно выделить три основных направлений развития:

экспериментально-феноменологическое, где основное внимание уделяется экспериментальному изучению поведения реальных материалов под внешней нагрузкой и при разрушении [2, 3 и др.],

расчетно-аналитическое, основанное на обобщенных математических моделях изучения критериев прочности для непрерывных сред с учетом их вязкоупругости, пластичности, ползучести и реологического поведения без углубления в физику процессов

структурно-физическое, в котором рассматривают закономерности структурных изменений в материале при его нагружении, например, дислокационные механизмы субмикроскопические нарушения в кристаллической решетке и вызванные нагрузкой их изменение, приводящее к разрушению [4, 7 и др.];

Среди второго направления, где преобладают математические подходы к описанию пластического поведения материалов (главным образом металлов), можно выделить:

деформационные теории пластичности, основанные на изучении связи полной деформации с напряжениями;

теории течения на основе связи напряжений с приращениями деформаций;

теория идеально пластичных материалов, когда принимается закон идеальной пластичности (без упрочнения).

Как справедливо подчеркнуто в работе [1], вполне сложившейся, хорошо объясняющей все важнейшие факты, теории прочности до сих пор не существует. В связи с этим приходится пока отказаться от учета дискретного и неоднородного строения материалов и ограничиваться описанием чисто внешних проявлений поведения реальных тел под нагрузкой, которые обнаруживаются при экспериментальных исследованиях в макроскопических опытах. Таким образом, в настоящее время преобладает феноменологический подход при разработке теорий прочности.

Кратко остановимся на некоторых, ставших классическими, теориях разрушения, основанных на идеализированных представлениях о материале как однородной, изотропной среде, в которой разрушение происходит независимо от температуры при статическом нагружении.

#### 1.1.1.1 Теория максимальных нормальных напряжений

Исторически одна из первых теорий, которую предложил Г. Галилей в 1636 г., основана на гипотезе, что материал разрушается при достижении максимальным нормальным напряжением в некоторой точке предельных значений (прочности на растяжение или сжатие). Обобщением этой теории является ее распространение на материалы, у которых прочность на растяжение  $\sigma_p$  не равна прочности на сжатие  $\sigma_c$ .

Условия отсутствия предельного состояния можно записать в виде

$$-\sigma_p \leq \sigma_i \leq \sigma_c, \quad (i=1,2,3), \quad (1.1)$$

где  $\sigma_p$ ;  $\sigma_c$  - предельные значения напряжений при растяжении и сжатии (параметры материала);

$\sigma_i$  - главные напряжения на площадке с индексом  $i$ .

В системе осей  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2$ ;  $\sigma_3$  условие (1.1) выглядит в виде замкнутой предельной поверхности прямоугольного параллелепипеда, у которого при  $|\sigma_p| < \sigma_c$  центр смещен от начала координат. В частном случае равенства прочности на растяжение и сжатие ( $\sigma_c = \sigma_p = \sigma_{on}$ ) поверхность вырождается в куб с центром в начале координат (рис. 1.1).

Эта теория имеет лишь историческое значение как веха в истории развития механики твердого деформируемого тела, в частности, теории прочности. Она непригодна для описания поведения материала в сложном напряженном состоянии.

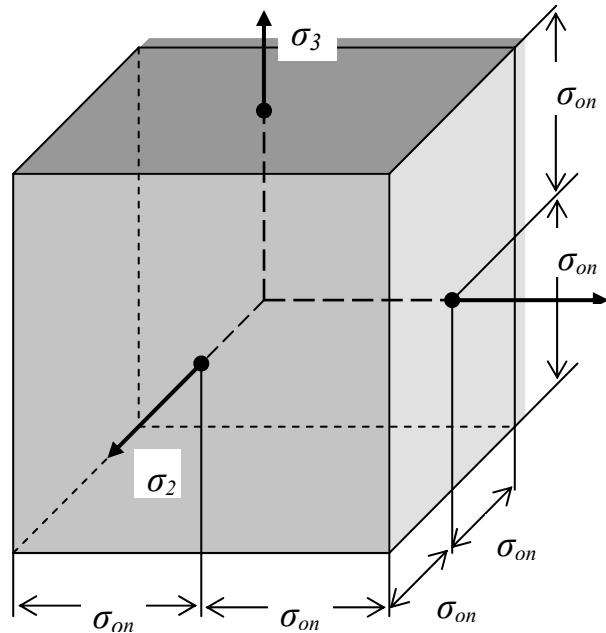


Рис. 1.1– Предельная поверхность теории максимальных напряжений

### 1.1.1.2 Теория максимальных относительных линейных деформаций

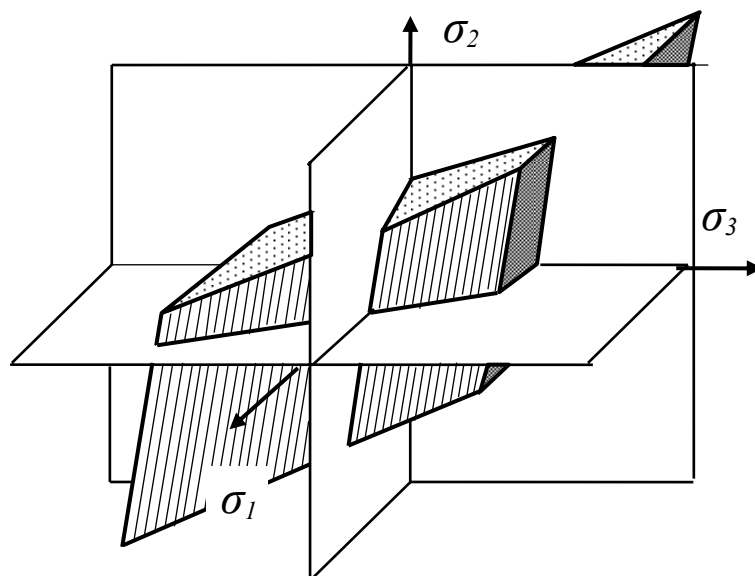


Рис. 1.2– Предельная поверхность теории максимальных деформаций

Теория Э. Мариотта основана на гипотезе, что разрушение материала наступает при достижении деформацией предельного, определяемого из опыта, значения. Однако эта теории плохо отражает поведение реального материала под нагрузкой, особенно в условиях сложного напряженного состояния.

Если материал одинаково сопротивляется удлинением при растяжении и укорочениям при сжатии, то, согласно уравнению (1.2), предельная поверхность в координатах  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2$ ;  $\sigma_3$  изображается замкнутым косоугольным параллелепипедом с гранями в виде ромба (рис. 1.2).

Эта теория во многом аналогична первой. После некоторых преобразований условий с предельными деформациями, условия отсутствия предельного состояния (т.е. сохранения прочности) запишутся в виде:

$$-\sigma_p \leq \sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k) \leq \sigma_c, \quad (i,j,k=1,2,3) \quad (1.2)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала.

Опыты во многих случаях не подтверждают вторую теорию прочности. Достаточно приемлемые результаты можно получить, когда материал разрушается лишь путем отрыва. Но и здесь первая теория прочности оказывается предпочтительнее ввиду более понятного и простого механизма разрушения.

### 1.1.1.3 Теория максимальных касательных напряжений

Теория, которая предложена Ш. Кулоном в 1773 г., а позднее Х.Треска в 1869 г. [1], предполагает наступление предельного состояния тела, - разрушения или пластического течения, - если максимальные касательные напряжения достигнут критического значения. Эта теория была положена в основу теории пластичности.

В системе осей  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  предельная поверхность представляет собой правильный шестигранный цилиндр (призма Кулона), равнонаклоненный ко всем трем осям напряжений. Этот критерий был назван условием текучести и хорошо отражает поведение идеально пластического материала под произвольной сжимающей нагрузкой.

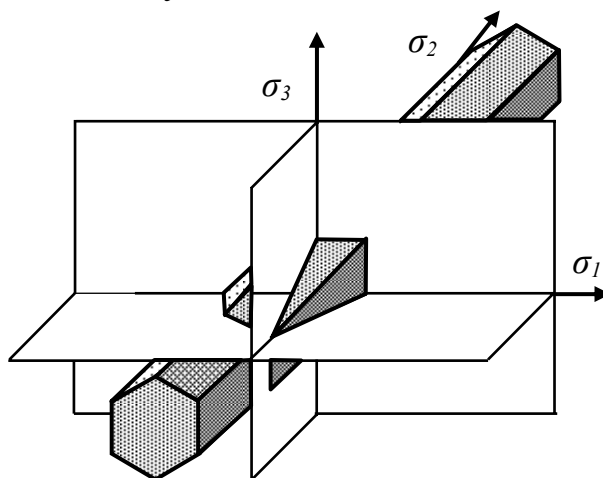


Рис. 1.3 – Предельная поверхность теории максимальных касательных напряжений (призма Кулона)

$$-\sigma_p \leq \sigma_i - \sigma_j \leq \sigma_c, \quad (i,j=1,2,3). \quad (1.3)$$

В частном случае изотропного тела предельная поверхность превращается в правильную шестигранную призму (призму Кулона), представленную на рис. 1.3. Однако этот критерий даже для пластического материала не пригоден в области растягивающих напряжений, когда разрушение происходит не пластическим сдвигом, а в виде отрыва. Для хрупких материалов этот критерий не пригоден ввиду того, что предельная огибающая кругов О. Мора имеет переменный угол наклона.

С нашей точки зрения важным преимуществом данной теории является утверждение, что на условие текучести не влияет промежуточное главное напряжение. Впервые теория правильно отразила для однородного материала феномен независимости действия разнонаправленных касательных напряжений, что полностью совпадает с экспериментом и более глубокими теоретическими и физическими соображениями. К сожалению, в дальнейшем произошел отход от этого положения в сторону мнимой общности теории. Так, попытка учета промежуточного

главного напряжения затмила ясный физический смысл явления разрушения и привела к заметному математическому усложнению теорий прочности, когда математические выкладки и геометрические построения стали затруднять понимание физических причин разрушения материалов.

#### 1.1.1.4 Энергетическая теория прочности

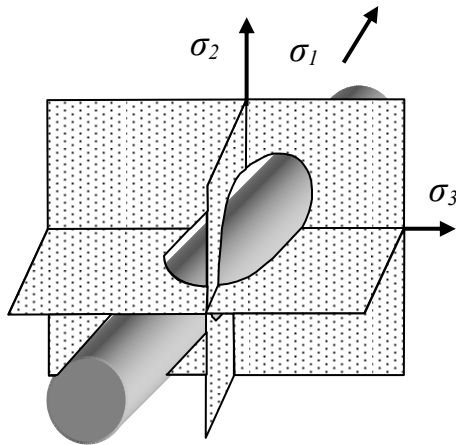


Рис.. 1.4 –Цилиндр Мизеса

В основу положена гипотеза (Э.Бельтрами, 1885 г, М. Хубер, 1904 г.), что предельное состояние материала наступает, когда удельная потенциальная энергия формоизменения в данной точке достигнет предельной величины. После представления энергии формоизменения через главные напряжения условие прочности запишется в виде:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_r \quad (1.4)$$

где  $\sigma_r$  - предельное значение напряженного состояния материала.

В системе осей  $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$  предельная поверхность оказывается круговым цилиндром с осью, равнонаклоненным к осям  $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$  (рис. 1.4). Оказалось, что этот цилиндр описан вокруг призмы Кулона и, по сути, не слишком от нее отличается.

Идея о том, что материал будет разрушаться при достижении энергии некоторого предела, была интуитивно близка многим механикам и физикам 19 и 20 столетия (Максвелл, Бельтрами, Мизес, Генки и др.). Ряд ученых (Мизес в 1913 г.) указывал на предпочтительность условия (1.4) перед условием Кулона ввиду учета всех составляющих напряжений при определении предельного условия прочности, а также из-за упрощения математической записи уравнения предельной поверхности.

#### 1.1.1.5 Сравнение классических теорий

Сравнение всех четырех классических теорий прочности можно видеть на рис. 1.5, где представлены в виде граничных линий следы



предельных поверхностей всех теорий на плоскости  $\sigma_1; \sigma_2$ : 1 – теория нормальных напряжений; 2 – теория максимальных относительных деформаций; 3 – теория максимальных касательных напряжений; 4 – теория удельной потенциальной энергии формоизменения.

Однако ни третья, ни четвертая теории прочности непригодны для описания поведения материалов при объемном растяжении, давая заведомо неверные результаты. Это ставит под сомнение основную физическую предпосылку, на которой основана четвертая теория, об определяющей роли энергии формоизменения материала в окрестности данной точки.

Гносеологическим недостатком четвертой теории, с которым примирилось большинство ученых, является подмена рассмотрения и адекватного описания физических процессов, связанных с разрушением или переходом в предельное состояние материалов, абстрактными алгебраическими преобразованиями. Эта негативная тенденция резко усилилась впоследствии и достигла своего апогея в конце 20 века в безуспешных попытках решить сложную проблему прочности алгебраическими методами.

Таким образом, развитие классических теорий прочности свелось к удовлетворительному описанию лишь условия пере-

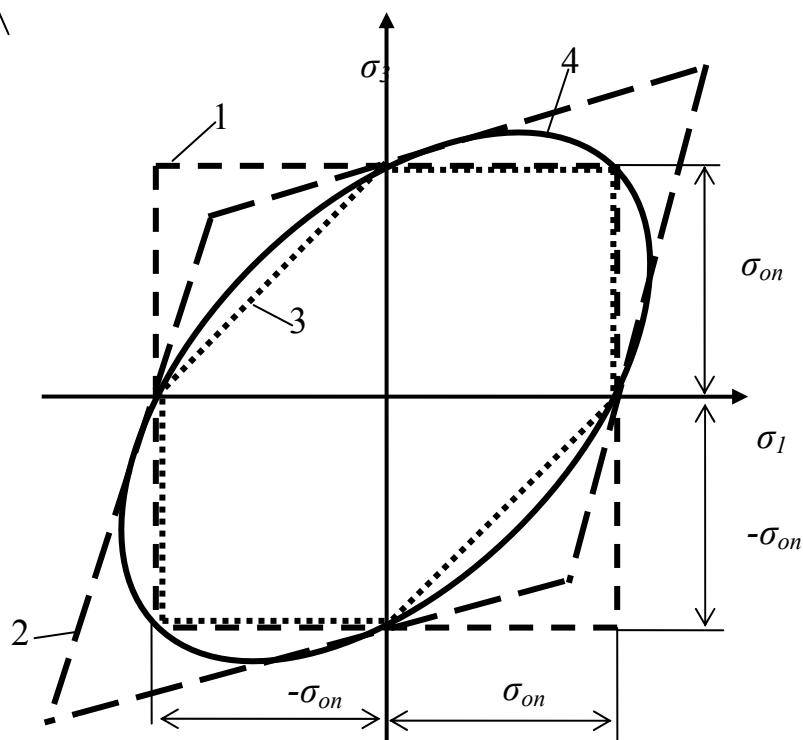


Рис. 1.5– Следы предельных поверхностей классических теорий прочности

хода в предельное состояние пластических материалов. Роль этих теорий и их распространение в расчетной практике оказались значитель-

ными потому, что главные конструкционные материалы в машиностроении, - металлы, - проявляют во многом пластические свойства.

Для большинства других материалов (искусственных: бетон, строительные растворы, кирпич и др.; и естественных – почти все разнообразие каменных материалов и горных пород) характерно хрупкое разрушение по схеме отрыва и для них классические теории оказались непригодны. Они дают удовлетворительные результаты лишь для узкого класса пластических материалов, главным образом металлов.

Поэтому сохраняет большую актуальность проблема создания такой обобщенной теории прочности, которая была бы пригодна для достоверного описания предельных состояний и прочности всего многообразия различных материалов, - и пластичных и хрупких. В этом направлении работает большинство ученых, исследовавших проблемы прочности в прошедшем XX веке, и эти исследования продолжаются в настоящее время.

## 1.1.2 Современные теории прочности

### 1.1.2.1 Теория прочности О. Мора

Одной из первых и весьма плодотворных попыток создания общего для всего многообразия материалов критерия прочности была теория прочности О. Мора (1900 г.). В ее основе лежит предположение, что промежуточная компонента тензора напряжений не влияет на прочность

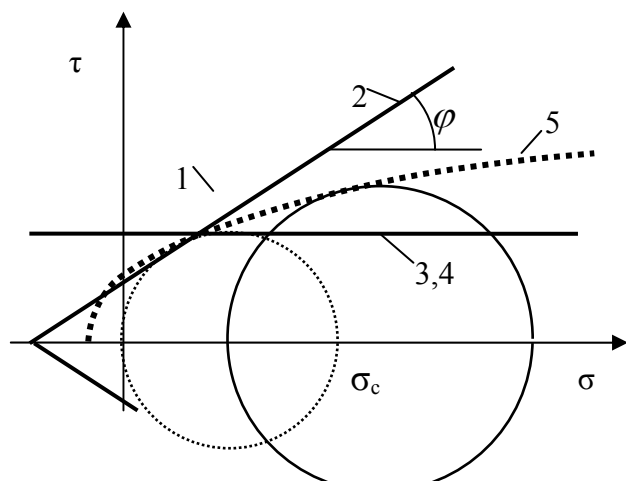


Рис. 1.6 – Классические теории прочности на диаграмме Мора (1-4) и реальный паспорт прочности 5

материала, а предельное состояние возникает на площадках, которые всегда проходят через направление промежуточного главного напряжения. При этом если на некоторой площадке тела с нормалью  $n$ , на которой действует нормальное  $\sigma_n$  и касательное  $\tau_{nt}$  напряжения возникает предельное состояние в виде неупругого сдвига (скольжения), то предельное значение касательного напряжения  $\tau_{nt}$  зависит от нормального напряже-

ния  $\sigma_n$  на площадке.

Предельная поверхность строится на диаграмме О. Мора в виде огибающей наибольших (предельных) кругов напряжений. Такое представление напряженного состояния тела в виде кругов на диаграмме Мора и предельных поверхностей в виде огибающих наибольших кругов дало возможность исследователям значительно увеличить наглядность и упростить сравнительный поиск теорий прочности для разных материалов. Теория Мора не только характеризует предельное напряженное состояние материала, при котором происходит разрушение, но и предсказывает ориентацию предельной площадки, на которой реализуется предельное состояние.

В качестве примера на рис. 1.6 представлены предельные огибающие наибольших кругов напряжений для всех классических теорий прочности, при этом для удобства сравнения у них прочность на одноосное сжатие  $\sigma_c$  принята одинаковой. Как видно из графиков паспортов прочности, все они линейные, причем 3 и 4 теории прочности имеют совпадающие огибающие, параллельные оси нормальных напряжений.

Реальный паспорт прочности для большинства материалов, представленный кривой 5, разительно отличается от теоретических своей *нелинейностью*. Это доказывает непригодность классических теорий прочности для описания предельных состояний реальных материалов и, в первую очередь, горных пород и каменных (искусственных и естественных) материалов.

Чтобы избежать такого несоответствия, О. Мор предложил описывать предельную поверхность материала с помощью некоторой функции

$$\tau_{nt} = F(\sigma_n), \quad (1.5)$$

а параметры этой функции определять из эксперимента.

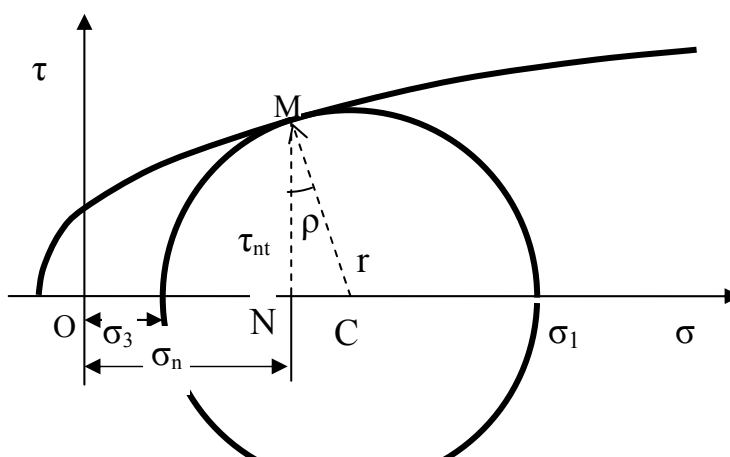


Рис. 1.7 – Схема к определению главных напряжений через напряжения на площадке с нормалью  $n$

Критерий прочности Мора (также как и другие теории) можно выразить в инвариантной (т.е. независимой от выбора системы координат) форме в пространстве главных напряжений, если известно уравнение огибающей в координатах  $\sigma_n$ - $\tau_{nt}$ . Коэффициент трения  $f$ , равный тангенсу угла внутреннего трения  $f = \operatorname{tg} \rho$  по уравнению огибающей (1.5), равен:

$$f = \operatorname{tg} \rho = \frac{\partial \tau_{nt}}{\partial \sigma_n}. \quad (1.6)$$

Из рис. 1.7 путем несложных геометрических построений можно записать выражения для напряжений на площадке сдвига через главные напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_{nt} &= NM = CM * \operatorname{Cos} \rho = [(\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{Cos} \rho] / 2 \\ \sigma_n &= OC - CN = OC - CM * \operatorname{Sin} \rho = [(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{Sin} \rho] / 2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Запишем тождества, которые проверяются прямой подстановкой из (1.6):

$$\operatorname{Cos}(\rho) = 1 / \sqrt{1 + f^2}; \quad \operatorname{Sin}(\rho) = f / \sqrt{1 + f^2}, \quad (1.8)$$

на основании чего получим инвариантную форму записи предельной кривой в пространстве главных напряжений:

$$\sigma_1 = \sigma_n + \tau_{nt} (f + \sqrt{1 + f^2}); \quad \sigma_3 = \sigma_n + \tau_{nt} (f - \sqrt{1 + f^2}). \quad (1.9)$$

Зависимости (1.8, 1.9) весьма полезны и нам понадобятся для дальнейших построений в следующих разделах.

Предложение Мора строить концепцию прочности материала, полагаясь на эксперимент, имеет и сильные и слабые стороны. Прогрессивность критерия (1.5) состоит в том, что появилась возможность описывать прочностные свойства реальных материалов с криволинейными огибающими. Недостаток, в свою очередь, можно усмотреть в отсутствии каких либо теоретических обоснований вида функции (1.5) и ограничений на количество экспериментальных параметров, что толкнуло многих исследователей на путь введения многочисленных эмпириче-

ских констант, а это нарушало главный принцип науки – использовать для описания любого явления минимальное число физических параметров при их максимальном теоретическом обосновании.

Принятое по умолчанию важное, но пока недоказанное, предположение О. Мора о несущественной роли промежуточного главного напряжения на прочность неоднократно подвергалось критике и отвергалось, тогда как его идея о возможности выбора экспериментальной функции в виде (1.5) была развита, модифицирована и усовершенствована впоследствии многими учеными. А. Надаи модифицировал идею О. Мора, опираясь на основные параметры энергетической теории прочности, и предложил описывать предельное состояние материала в виде зависимости между октаэдрическими касательным  $\tau_{окт}$  и нормальным  $\sigma_{окт}$  напряжениями, которые действуют на октаэдрических площадках, т.е. площадках, равнонаклоненных к направлениям трем главным напряжениям:

$$\tau_{окт} = F(\sigma_{окт}), \quad (1.10)$$

где 
$$\tau_{окт} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}; \quad \sigma_{окт} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \sigma_{ср}$$

Предельная поверхность в пространстве главных напряжений  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2$ ;  $\sigma_3$  представляет собой поверхность вращения с осью, совпадающей с гидростатическим напряженным состоянием  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . В зависимости от выбора вида функции (1.10) начали возникать многочисленные теории прочности, главным отличием которых являлась вариации сложных алгебраических преобразований инвариантов напряжений, с помощью которых пытались достигнуть соответствия расчетных и экспериментальных результатов. Разумеется, хотя эти исследования и назывались «теориями прочности», теоретических положений там было мало, и они находились на уровне ординарных, хотя и громоздких алгебраических выкладок, за которыми терялся смысл процесса разрушения как физического явления.

В этом, по нашему мнению, состоит недостаток, казалось бы, изящного «обобщения» теории О. Мора, сделанное А. Надаи. С другой стороны, попытки адекватно описать экспериментальные данные по предельным состояниям материалов оказались малопродуктивными,

поскольку не содержали новых теоретических идей или физических механизмов, объясняющих сложные процессы при разрушении материала. Таким образом, можно считать, что классические теории прочности, выродившись в сложные, но во многих отношениях банальные алгебраические построения, исчерпали себя. Не спасло положение и попытка обобщить теорию О. Мора, сделанная М.М. Филоненко-Бородичем [8].

### ***1.1.2.2 «Обобщенные» критерии прочности***

Глубина и огромные возможности, заключенные в теории прочности Мора, были в какой-то мере использованы в многочисленных попытках обобщить его теорию в 20-м веке. Все они сводились, по сути, к устранению, как казалось авторам, недостатка теории прочности Мора, в которой промежуточное главное напряжение не учитывается. Как показали экспериментальные исследования, на самом деле это напряжение оказывает настолько малое влияние на прочность материалов, что поправки лежат в пределах точности измерений.

С позиций МТДТ обобщение критериев прочности могло происходить в двух направлениях:

а) выполнить теоретическое обоснование и найти критерий прочности из общих положений механики деформируемого твердого тела;

б) пойти в направлении более глубокого рассмотрения физики процессов деформирования и разрушения материалов, чтобы определяющие уравнения теории прочности учитывали структурные перестройки, возникающие в теле в процессе его нагружения.

Сразу отметим, что подавляющее большинство работ в направлении обобщения положений Мора были сконцентрированы на первом направлении, а второе направление было почти проигнорировано. Это исторически во многом было обусловлено разрывом между методами и научными направлениями в физике и механике деформируемого твердого тела.

Схема подхода по первому направлению и сущность этих обобщений заключались в следующем. Полагалось, что предельное условие прочности (критерий прочности) можно найти из более широких предпосылок и полученных на их основе более обобщенного уравнения, чем у Мора (1.5). Вид такого уравнения записывался в виде алгебраической зависимости первого  $\theta_1$  и второго  $\theta_2$  обобщенного инварианта тензора

напряжений, где под термином «обобщенный» подразумевается комбинация первого и второго основных инвариантов тензора напряжений:

$$\begin{aligned} F(\theta_1; \theta_2) &= C \\ \theta_1 &= I_{11} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ \theta_2^2 &= I_{21} + \alpha I_{22} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \alpha(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \end{aligned}, \quad (1.11)$$

где  $C$ ,  $\alpha$  – некоторые постоянные материала, характеризующие его прочность.

Если уравнение (1.11) решить относительно  $\theta_2$  и представить в параметрическом виде

$$\theta_2^2 = f(\theta_1), \quad \theta_2^2 = t; \quad t = f(\theta_1), \quad (1.12)$$

то первое параметрическое уравнение представляет собой круговой цилиндр с осью, равнонаклоненной к главным напряжениям, а второе – поверхность инварианта  $\theta_1$ , нормальную к пространственной диагонали. Заменяя  $\theta_1$  и  $\theta_2$  их выражениями и приняв в (1.11)  $\alpha = -1$ , получим для обобщенных инвариантов:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sqrt{3}z; \quad \theta_2^2 = 1,5(x^2 + y^2) \\ r^2 &= \psi(z); \end{aligned} \quad (1.13)$$

Последнее уравнение (1.13) дает предельную поверхность вращения, отстоящую от начала координат на расстояние  $z$ .

Как показывают алгебраические преобразования, условие (1.11) можно записать через октаэдрические напряжения, так как оно непосредственно связано с теорией прочности Мора. Образующая предельной поверхности представляет собой кривую второго порядка (парабола, эллипс, гипербола), следовательно, предельная поверхность является поверхностью второго порядка. Вид функции может быть различным, чаще всего его берут в виде:

$$\theta_2^2 + A\theta_1^2 + B\theta_1 = C, \quad (1.14)$$

где  $A, B, C$  – постоянные прочности материала, которые необходимо определить из трех независимых экспериментов, например, из испытаний пород на сжатие, растяжение и кручение.

В результате, применяя преобразование (1.12) к виду предельного условия (1.13), можно получить его в виде [9]:

$$r^2 + 2Az^2 + 2Bz/\sqrt{3} = C. \quad (1.15)$$

В формате общего выражения (1.14) при  $A=0$  выполнено предельное условие критерия прочности Баландина [10]:  $r^2 + 2Bz/\sqrt{3} = C$ . Это уравнение параболоида вращения, который пересекает свою ось в одной точке, соответствующей пределу прочности на всестороннее растяжение. Этот критерий прочности не получил должного экспериментального подтверждения ввиду строго фиксированной формы предельной огибающей. То же можно сказать и о критерии прочности Ягна [11], который также вытекает из обобщенного исходного уравнения (1.11), несмотря на то, что в нем объединены несколько предельных поверхностей, у которых образующие представляют собой кривые второго порядка. Такого же характера обобщение было сделано и критерием прочности Миролюбова [12], в котором необходимо два экспериментальных значения, чтобы построить предельную огибающую.

Более глубокое обобщение теории прочности О. Мора сделано М.М. Филоненко-Бородичем [8]. Сущность обобщения заключается в том, чтобы искать функцию критерия предельного состояния материала с учетом коэффициента Лодэ  $\mu_\sigma$  напряженного состояния в окрестности точки, т.е. перейти к учету влияния на прочность промежуточного главного напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_{окт} &= F(\sigma_{окт}, \mu_\sigma); \\ \mu_\sigma &= 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $\mu_\sigma$  - коэффициент Лодэ, учитывающий вид напряженного состояния в окрестности точки, -  $1 < \mu_\sigma < 1$ .

В зависимости А. Надаи (1.10) автором обобщения предложено считать, что каждой точке  $\tau_{окт}; \sigma_{окт}$  соответствует семейство конгруэнтных окружностей Мора, которые различаются видом напряженного



состояния с помощью коэффициентов Лодэ  $\mu_\sigma$ . Для каждого коэффициента Лодэ  $\mu_\sigma$  существует своя предельная огибающая кругов Мора.

В сущности, исследования М.М. Филоненко-Бородича были направлены на более строгий и теоретически оправданный учет влияния на прочность промежуточного главного напряжения с помощью коэффициента Лодэ  $\mu_\sigma$ . Однако, как это отмечается в работе [1], опытами Т. Кармана и Р. Беккера, выполненными для крайних значений изменения коэффициента Лодэ  $\mu_\sigma = 1$  и  $\mu_\sigma = -1$  показано, что огибающие мало отличаются друг от друга. Поэтому практичнее вовсе не учитывать промежуточное главное напряжение при определении прочности материала, оставаясь в рамках теории прочности О. Мора.

Особое место занимает критерий прочности Давиденкова-Фридмана [3], в котором четко различаются два типа разрушения – отрывом или сдвигом, причем утверждается, что, в зависимости от условий проведения опыта металл может разрушаться по одному из этих механизмов. На этом основании сделано предположение, что у металла должно быть два параметра предельной прочности – сопротивление отрыву и сопротивление сдвигу, а самый простой способ учета двойственного характера разрушения металла – это рассматривать одновременно действие касательных и нормальных напряжений. В критерии Давиденкова-Фридмана вводится предел прочности по максимальному касательному напряжению  $\tau_{\max}$  (что допустимо только для пластических материалов, например, металлов) и предельное значение приведенных растягивающих напряжений  $\sigma_{\text{прив}}$ . На основании этого вводится новый коэффициент  $\alpha$  – коэффициент жесткости нагружения, который равен отношению:

$$\alpha = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\text{прив}}}. \quad (1.17)$$

Приведенное растягивающее напряжение  $\sigma_{\text{прив}}$  вычисляют по формуле Гука для наибольшего положительного удлинения, в котором оказался материал

Если  $\alpha > 1$ , - что означает превалирование касательных напряжений над приведенными растягивающими, - то нагружение считается мягким и разрушение материала будет вязким, т.е. от сдвига при малых удлинениях. Если  $\alpha < 1$ , то нагружение считается жестким и происходит по механизму отрыва.

В качестве недостатков данного критерия разрушения в первую очередь укажем на невозможность его применения для горных пород и вообще для материалов, которые не являются пластичными. Как известно, у этих материалов разрушение хрупкого типа происходит даже при отсутствии растягивающих напряжений в виде комбинации сдвигов и отрывов, что не вкладывается в схему Давиденкова-Фридмана.

В качестве одного из многочисленных критериев прочности, предложенных в виде комбинаций первого и второго инвариантов тензора напряжений, действующих в окрестности рассматриваемой точки, можно привести критерий Писаренко-Лебедева [13].

$$3q^2T + (1 - q^2)\sigma_{\max}^2 = \sigma_*^2 \quad . \quad (1.18)$$

Здесь прослеживается близкая идейная аналогия с критерием Давиденкова-Фридмана, когда авторами введен дополнительный параметр  $0 < q < 1$ , с помощью которого можно описать условие прочности для пластического материала при разрушении от сдвига  $q=1$  или для предела прочности от разрыва  $q=0$ .

Этот критерий является частным случаем более мощного и общего критерия А. Надаи (1.10) и обладает всеми его недостатками. Главным для нас является то, что этот критерий непригоден для каменных материалов и горных пород. И хотя в дальнейшем критерий подвергался авторами модернизации с помощью дополнительно введенных экспериментальных поправок, его концептуальная ограниченность не позволила ему получить какого-либо практического применения.

Таким образом, критерии прочности, преследовавшие цель обобщения теории прочности Мора, основаны на единообразном подходе – предположении, что удачная комбинация первого и второго инвариантов тензора напряженного состояния материала с несколькими (2-3) экспериментальными постоянными способны правильно предсказать особенности разрушения любого материала. Однако, по существу, все эти теории носили эмпирический характер, хотя это было скрыто фасадом сложных алгебраических и геометрических преобразований, поскольку вид предельного условия можно было определить только экспериментально. Достоинством данного этапа развития теории прочности является установление некоторых общих закономерностей и принципов, которым должна отвечать предельная огибающая прочности

материалов. К недостаткам выполненных исследований следует отнести поверхностный подход к изучению глубинных механических процессов при разрушении материалов с позиций физики происходящих явлений.

### **1.1.3 Теории прочности горных пород**

В данном разделе рассмотрим наиболее известные критерии и теории прочности, предложенные для горных пород. Как показала история создания и совершенствования этих критериев, авторы в большинстве случаев пытались применить достижения теории прочности, полученные в МТДТ, к горным породам, при этом они встретили на своем пути беспрецедентные трудности. С одной стороны, это было обусловлено слабым развитием экспериментальных исследований и недостатками теоретической базы механики твердого деформируемого тела. С другой стороны, сам по себе объект исследований, - горная порода и массив горных пород, - представляют собой несоизмеримо более сложную среду с широчайшим варьированием не только своего поведения под нагрузкой, но даже в отдельности упругих, прочностных и реологических параметров. Поэтому, несмотря на высокую актуальность проблемы создания теории о деформировании и разрушении горных пород и ряд неоспоримых достижений в теории и эксперименте, она не была удовлетворительно решена. Кратко рассмотрим достигнутые к настоящему времени результаты этих исследований, - успехи и неудачи.

#### ***1.1.3.1 Исследования прочности К.В. Руппенейта***

В своих работах К.В. Руппенейт [14,15] один из первых в отечественной горной науке (в начале 50-х гг. прошлого века) сделал попытку теоретически переосмыслить накопленные к тому времени экспериментальные данные по натурным и лабораторным испытаниям образцов горных пород. Своими исследованиями К.В. Руппенейт способствовал расширению использования аналитики в горной науке, основанной на достижениях механики сплошной среды и переносу ее результатов в теоретические и экспериментальные исследования горной направленности.

В работах [14,15] он перенес из МТДТ в горную науку важные условия, которым должна удовлетворять предельная огибающая на диаграмме Мора. К сожалению, наряду с перечислением правильных усло-

вий, накладываемых на предельную огибающую, которые были получены в рамках теории МТДТ, им были сделаны и заметные ошибки, которые были некритически восприняты большинством горных специалистов по механике горных пород и оказали в какой-то мере отрицательное влияние на ее дальнейшее развитие. В частности, к таким ошибкам следует отнести утверждение, что радиус круга предельной огибающей в точке всестороннего растяжения для всех материалов, способных работать на растяжение, отличен от нуля. В своих работах он ошибочно считал, что предел прочности при всестороннем растяжении не может превышать прочность при одноосном растяжении. Это наложило заметное ограничение на вид возможных предельных огибающих и резко снизило круг возможных поисков ее наиболее правильной формы.

К ошибочным утверждениям К.В. Руппенейта следует отнести и то, что огибающую полуразрушенного материала, разбитого трещинами, можно получить параллельным переносом исходной огибающей для неразрушенного материала в начало координат диаграммы Мора. При этом необоснованно утверждалось, что «полуразрушенный» материал будет иметь прочность на одноосное сжатие, равное прочности на одноосное растяжение исходного материала. Это заблуждение было изложено в столь безапелляционной манере, что было воспринято большинством исследователей как догма и стало наряду с другими препятствием правильному формированию направлений дальнейших исследований в механике горных пород.

Исследуя возможные формы представления предельной огибающей, автор в своих работах подробно рассматривает параболическую, гиперболическую, прямолинейную и даже циклоидальную ее формы. Он делает правильный вывод о том, что все формы отвечают основным требованиям к предельным огибающим, кроме циклоидальной (!?), у которой прочность на всестороннее растяжение больше прочности на одноосное сжатие. Параболическую форму автор отбросил, как содержащую недостаточно параметров (ошибочно считая, что их всего 1) для описания свойств реальных горных пород. Окончательно К.В. Руппенейт отдает предпочтение гиперболической огибающей как наиболее теоретически обоснованной (у нее два параметра для выбора прочности). Отметим, что в последующих аналитических выкладках автор, тем не менее, не применяет такое условие прочности из-за его

сложности, а предпочитает использовать примитивную прямолинейную форму огибающей, т.е. условие прочности Кулона.

### ***1.1.3.2 Критерий прочности М.М. Протодяконова-младшего***

Одним из первых в отечественной механике горных пород осознал проблему отыскания обобщенного уравнения предельной огибающей (паспорта прочности) М.М. Протодяконов-младший. Его исследования [16] были стимулированы большим фактическим материалом по объемным лабораторным испытаниям пород, полученным в институте ИГД им. акад. А.А. Скочинского в 1950-60 гг. В этом направлении поисков, наряду с теоретическими изысканиями К.В. Руппенейта, о возможном виде предельной огибающей кругов Мора для горных пород, в первую очередь следует упомянуть предложенное М.М. Протодяковым обобщенное уравнение паспорта прочности [1] в виде эмпирической зависимости (приводим в современных обозначениях):

$$\tau_{nt} = \tau_{\max} \left[ \frac{(\sigma_p + \sigma_n)^2}{(\sigma_p - \sigma_n)^2 + a^2} \right]^{3/8}, \quad (1.19)$$

где  $\tau_{\max}$ ,  $a$  - параметры материала, первый из которых дает ординату асимптоты, к которой стремится предельная огибающая, а второй задает форму (крутизну) огибающей в начале координат;

$\sigma_p$ - предел прочности породы на одноосное растяжение.

Уравнение (1.19) – одна из первых попыток обобщить экспериментальные данные по результатам испытания пород на прочность в объемном напряженном состоянии в стабилометрах и получить единый паспорт прочности для пород. Схема испытаний соответствовала обобщенному растяжению ( $\sigma_3 = \sigma_2 < \sigma_1$ ), когда коэффициент Лодэ  $\mu = -1$ , т.е. в лабораторных испытаниях была реализована схема нагружения Кармана. К сожалению надо признать, эти испытания не всегда сопровождались данными о прочности образцов на одноосное растяжение и сжатие, их точность оставляла желать лучшего и не превышала 20%, а выбор режимов испытаний (скорости приложения нагрузок, точности регистрации результатов и т.д.) во многих случаях не оговаривались. Поскольку в то время экспериментальная база данных по испытаниям пород в стабилометрах была недостаточной, наблюдались известные

трудности по теоретическому обобщению результатов лабораторных испытаний, которое предпринял М.М. Протодяконов.

Следует отметить, что хотя уравнение (1.19) является эмпирическим, и его вид подбирался так, чтобы наиболее полно удовлетворить теоретическим требованиям, в нем, по-видимому, чисто интуитивно найдено удачное выражение в виде суммы нормального напряжения на площадке сдвига и прочности на одноосное растяжение ( $\sigma_p + \sigma_n$ ), которое предвосхитило теоретические уравнения дальнейших критериев прочности. Это выражение эмпирически подобрано так, чтобы предельная огибающая (паспорт прочности) на диаграмме Мора всегда проходила через ось нормальных напряжений в точке  $\tau_{nt} = 0$  при  $\sigma_n = -\sigma_p$ .

Как показывает анализ рекомендуемого обобщенного уравнения,

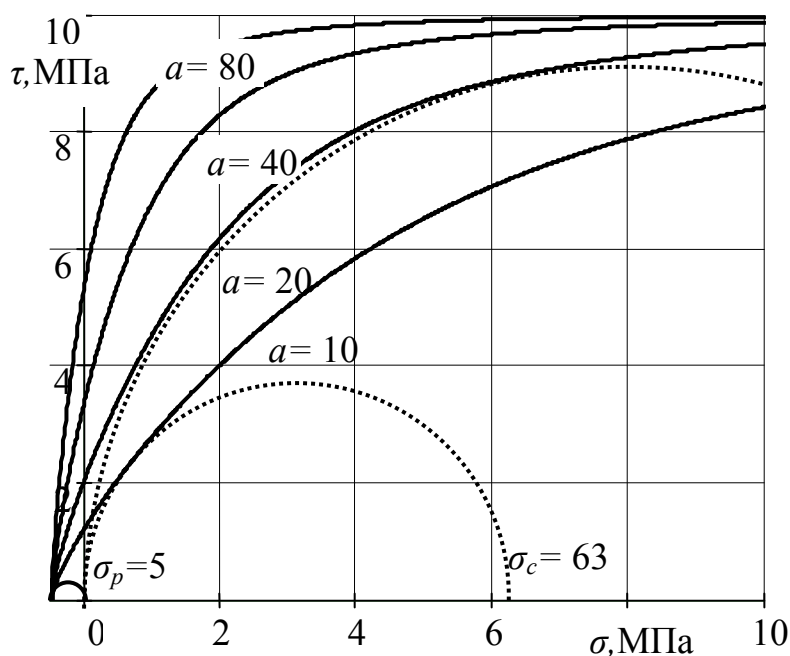


Рис. 1.8 - Паспорт прочности по уравнению (1.19) при  $\tau_{max} = 100$  МПа;  $\sigma_p = 5$  МПа и изменении параметра формы  $a$  от 10 до 80 МПа.

в нем имеются три независимых показателя, которые следует определять по испытаниям породы -  $\tau_{max}$ ,  $a$  и  $\sigma_p$ . Если прочность породы на одноосное растяжение обладает ясным физическим смыслом и существуют методики по ее определению в лаборатории, то остальные показатели имеют весьма неопределенный физический смысл и с

ними дело обстоит сложнее. Это в первую очередь касается показателя формы, который предлагается определять подбором к экспериментальной кривой паспорта прочности данной породы. Что касается показателя  $\tau_{max}$ , то прямое получение его из лабораторных исследований в принципе невозможно, поскольку по своему смыслу – это асимптота, к кото-

рой стремится обобщенная огибающая при предельном увеличении среднего сжимающего напряжения.

На рис. 1.8 показан пример различных паспортов прочности по обобщенному уравнению (1.18), когда зафиксированы два (из трех) независимых параметра  $\tau_{max} = 100$  МПа;  $\sigma_p = 5$  МПа, в то время как показатель формы обобщенной огибающей  $\alpha$  меняется от 10 до 80 МПа. На этом же рисунке показаны предельные круги Мора для одноосного сжатия и растяжения. Как видим, параметр  $\alpha$  сильно видоизменяет обобщенную огибающую, несмотря на то, что ее начало закреплено прочностью на одноосное растяжение, и она стремится к общей заданной асимптоте.

Следовательно, попытки интуитивного подбора аналитического вида предельной огибающей в этом случае оказались не совсем удачными. Несмотря на актуальность постановки задачи и оригинальность предложенного обобщенного уравнения, уравнение малоприспособно для большинства горных пород ввиду фиксированной формы паспорта прочности и теоретически необоснованной посылки о наличии у паспорта прочности асимптоты, так как из (1.19) следует, что  $\tau_{nt} \rightarrow \tau_{max}$  при  $\sigma_n \rightarrow \infty$ . Возникают и иные парадоксы. К ним в первую очередь следует отнести то, что, согласно данному уравнению, существуют естественные каменные материалы, у которых может отсутствовать прочность на одноосное растяжение, тогда как прочность на одноосное сжатие сохраняет очень высокое значение, что мало приемлемо. К числу других недостатков можно отнести реализацию предположения К.В. Руппенейта, что по мере уменьшения прочности на одноосное растяжение паспорт прочности конгруэнтно смещается в начало координат вдоль оси нормальных напряжений. С другой стороны, выбрав в уравнении (1.19) показатель степени равным  $3/8$ , М.М. Протодяконов получил, что прочность на одноосное растяжение всегда меньше прочности на всестороннее растяжение, что прямо противоречит другому условию К.В. Руппенейта, который утверждал противоположное. Как мы увидим в дальнейшем, оба этих крайних утверждения неверны. Отметим попутно, что из этого уравнения невозможно получить предельную кривую для пластических пород, когда прочность на одноосное сжатие равна прочности на одноосное растяжение.

### 1.1.3.3 Критерий прочности З.Т. Бенявского

К числу критериев прочности, которые появились позже в виде нелинейных критериев разрушения, основанных на использовании эмпирических подходов, следует отнести формулу для критерия прочности З.Т. Бенявского [17]:

$$\sigma_1 = A\sigma_c^{0.25}\sigma_3^{0.75} + \sigma_c, \quad (1.20)$$

где  $A$  – эмпирическая константа.

Сразу следует отметить, что в этом уравнении полностью проигнорирована та часть предельной огибающей, которая находится в первом квадранте (область растяжения), поскольку всегда оказывается, что  $\sigma_1 \geq 0$ . Как ведет себя паспорт прочности, построенный в соответствии с (1.20), видно из рис. 1.9.

Определенную трудность в таких уравнениях, записанных в виде соотношения главных напряжений, представляет определение его вида

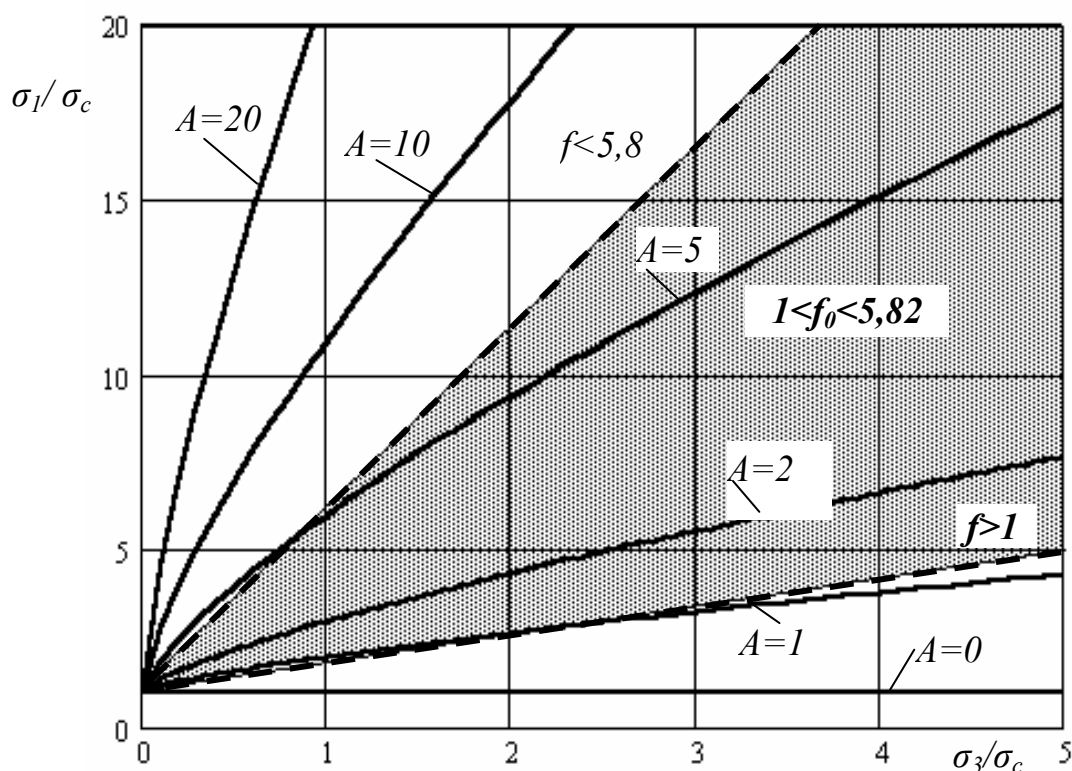


Рис. 1.9 - Семейство предельных огибающих по критерию прочности Бенявского в приведенных осях  $\sigma_1/\sigma_c$  -  $\sigma_3/\sigma_c$  для разных значений параметра  $A$  и область допустимы кривых



на диаграмме Мора, где предельная огибающая строится в координатах  $\sigma - \tau$ . Для этого необходимо выразить главные напряжения  $\sigma_3; \sigma_1$  через нормальное и касательное  $\sigma_n; \tau_{nt}$  напряжения на площадке разрушения. Для этого воспользуемся ранее выведенными преобразованиями (1.9), дополнив их выражение значением коэффициента трения, которое можно получить из заданного уравнения (1.20).

Поскольку подобные преобразования приходится делать неоднократно, приведем их более подробно. Цель преобразований – найти по известному уравнению предельной огибающей в координатах  $\sigma_3; \sigma_1$  в виде

$$\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3) \quad (1.21)$$

искомое уравнение предельной огибающей кругов напряжений диаграммы Мора в координатах

$$\tau_{nt} = \tau_{nt}(\sigma_n). \quad (1.22)$$

Выполним преобразования в следующем порядке. Воспользуемся, согласно (1.9), зависимостями

$$\sigma_1 = \sigma_n + \tau_{nt}(f + \sqrt{1 + f^2}); \quad \sigma_3 = \sigma_n + \tau_{nt}(f - \sqrt{1 + f^2}), \quad (1.23)$$

записав их в общем виде:

$$\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_n; \tau_{nt}; f); \quad \sigma_3 = \sigma_3(\sigma_n; \tau_{nt}; f). \quad (1.24)$$

Определим из каждого уравнения (1.23, 1.24) частные производные по  $\sigma_n$  с учетом того, что коэффициент внутреннего трения материала определяется по формуле  $f = tg(\rho) = \partial \tau_{nt} / \partial \sigma_n$ :

$$\frac{\partial \sigma_1(\sigma_n; \tau_{nt}; f)}{\partial \sigma_n} = 1 + f(f + \sqrt{1 + f^2}); \quad \frac{\partial \sigma_3(\sigma_n; \tau_{nt}; f)}{\partial \sigma_n} = 1 + f(f - \sqrt{1 + f^2}) \quad (1.25).$$

Найдем из исходного уравнения (1.21) производную  $\sigma_1$  по  $\sigma_3$ , обозначив ее  $f_0$ :

$$f_0 = \partial \sigma_1(\sigma_3) / \partial \sigma_3 \quad . \quad (1.26)$$

Воспользуемся тождеством

$$f_0 = \frac{\partial \sigma_1(\sigma_3)}{\partial \sigma_3} = \frac{\partial \sigma_1(\sigma_n)/\partial \sigma_n}{\partial \sigma_3(\sigma_n)/\partial \sigma_n} = \frac{1+f(f+\sqrt{1+f^2})}{1+f(f-\sqrt{1+f^2})}, \quad (1.27)$$

откуда, решая (1.27) относительно  $f$ , находим значение истинного коэффициента угла внутреннего трения материала:

$$f = \frac{f_0 - 1}{2\sqrt{f_0}} = 0,5(f_0^{1/2} - f_0^{-1/2}). \quad (1.28)$$

Сразу следует отметить, что исходя из физического смысла рассматриваемой задачи, необходимо, чтобы коэффициент угла внутреннего трения удовлетворял неравенствам  $0 \leq f \leq 1$  в области сжатия материала. Первое неравенство запрещает коэффициенту трения принимать отрицательные значения, а второе – ограничивает напряжения от сил внутреннего трения (без учета сцепления) верхним пределом, когда касательные напряжения не могут превышать нормальное на площадке разрушения.

Далее, подставив в исходное уравнение (1.21) значения напряжений из (1.24), получим общую неявную функциональную зависимость  $\tau_{nt}; \sigma_n$ :

$$F(\sigma_n; \tau_{nt}; f) = \sigma_1(\sigma_n; \tau_{nt}; f) - \sigma_1[\sigma_3(\sigma_n; \tau_{nt}; f)]. \quad (1.29)$$

Таким образом, задача решена в общем виде. В ряде случаев удобнее использовать уравнение предельной огибающей  $\tau_{nt}; \sigma_n$  в параметрическом виде, принимая в качестве параметра  $\sigma_3$  или  $\sigma_1$ , для чего можно воспользоваться рис. 1.7 и уравнениями (1.7)

$$\begin{aligned} \tau_n(\sigma_3) &= [\sigma_1(\sigma_3) - \sigma_3] \cos(\rho)/2 = [\sigma_1(\sigma_3) - \sigma_3] \frac{2 \cdot \sqrt{f_0(\sigma_3)}}{f_0(\sigma_3) + 1}, \\ \sigma_n(\sigma_3) &= [\sigma_1(\sigma_3) + \sigma_3]/2 + 0.5 \cdot [\sigma_1(\sigma_3) - \sigma_3] \frac{f_0(\sigma_3) - 1}{f_0(\sigma_3) + 1} \end{aligned} \quad (1.30)$$

где учтены выражения  $\text{Cos}(\rho) = 2 \cdot \frac{\sqrt{f_0}}{f_0 + 1}$ ;  $\text{Sin}(\rho) = \frac{f_0 - 1}{f_0 + 1}$ , которые можно получить с помощью зависимости (1.28).

Определим, какому условию должна удовлетворять первая производная  $f_0 = \partial \sigma_1(\sigma_3) / \partial \sigma_3$  по произвольному критерию прочности, чтобы удовлетворялись неравенства  $0 \leq f \leq 1$ . Для этого подставим в данное неравенство значения первой производной  $f_0 = \partial \sigma_1(\sigma_3) / \partial \sigma_3$  согласно уравнению (1.28), что дает для всех предельных кривых прочности по любому критерию важную закономерность:

$$1 \leq f_0 = \partial \sigma_1(\sigma_3) / \partial \sigma_3 \leq 3 + 2\sqrt{2} = 5,82. \quad (1.31)$$

Применим полученные преобразования к критерию Бенявского (1.20). Вначале рассмотрим предельные кривые прочности в осях главных напряжений, как это делается обычно для подобных критериев (рис. 1.9). На этих графиках не видно ничего необычного, поэтому все недостатки подобных критериев оказываются незамеченными.

Но если проанализировать, как изменяется коэффициент внутреннего трения, можно отметить парадокс: критерий Бенявского в определенных диапазонах изменения минимального главного напряжения не удовлетворяет допустимым пределам, которые накладываются на коэффициент трения физическим смыслом задачи  $0 \leq f \leq 1$ . Это хорошо видно из рис. 1.9 (допустимые пределы показаны граничными линиями для  $f_0$ ).

Из условия (1.31) можно найти допустимые пределы, которым должна удовлетворять постоянная  $A$  в критерии Бенявского (1.20), чтобы удовлетворялись физические неравенства  $0 \leq f \leq 1$ . Подставляя в это неравенство значение первой производной по (1.20) и решая относительно постоянной  $A$ , в результате получим границы допустимого изменения  $A$  в зависимости от приведенного минимального напряжения  $\bar{\sigma}_3 = \sigma_3 / \sigma_c$ :

$$1,33(\bar{\sigma}_3)^{0,25} \leq A \leq 7,77(\bar{\sigma}_3)^{0,25}. \quad (1.32)$$

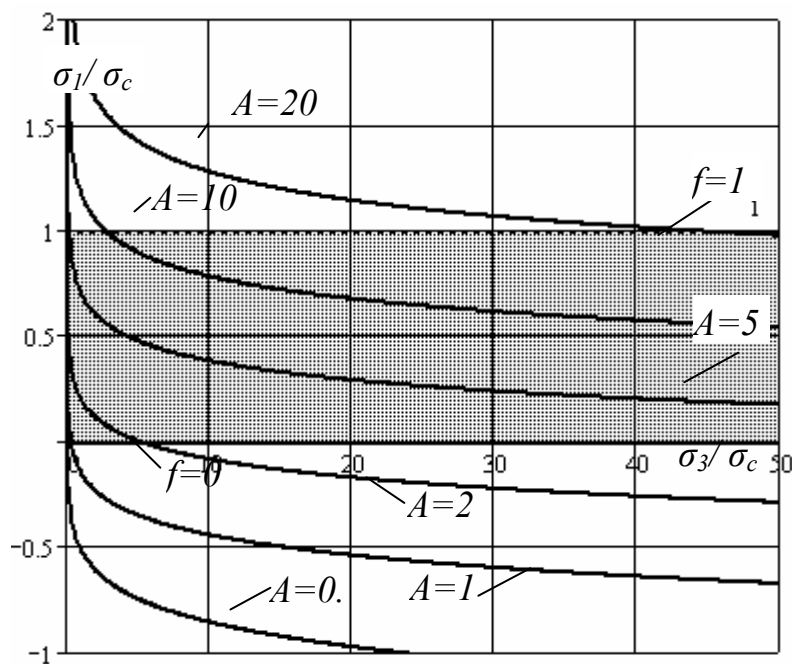


Рис. 1.10 - Графики изменения коэффициента угла внутреннего трения при росте минимальной компоненты напряжений  $\sigma_3/\sigma_c$  в критерии Бенявского для разных значений параметра  $A$

Из (1.32) следует, что всегда для любого значения  $A$  при определенных значениях приведенного минимального напряжения  $\bar{\sigma}_3$  найдется область, где будут нарушаться обе части неравенства (1.32), т.е. это значит, что всегда есть область значений  $\bar{\sigma}_3$ , где критерий Бенявского некорректен.

Особенно заметна ущербность данного критерия на рис. 1.10. Здесь коэффициенты угла внутреннего трения принимают отрицательные значения при любом значении постоянной  $A$ , т.е. любая кривая выходит за пределы допустимой области  $0 \leq f \leq 1$ , которая на рис. 1.10 заштрихована.

Проделав полученные выше преобразования (1.21-1.29), можно построить паспорт прочности на диа-

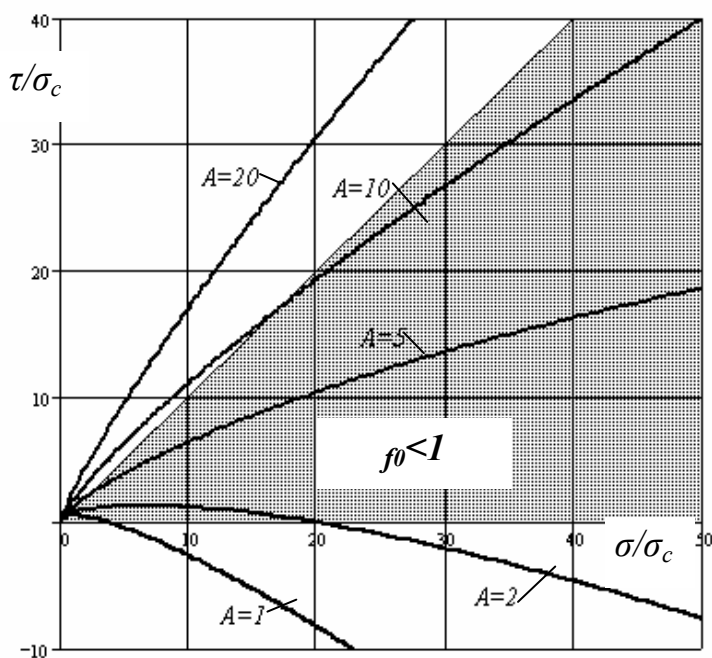


Рис. 1.11 –Паспорта прочности по критерию прочности Бенявского в приведенных осях  $\tau/\sigma_c$  -  $\sigma/\sigma_c$  для разных значений параметра  $A$

грамме Мора для критерия прочности, записанного в любом виде, чаще всего в главных напряжениях. На основании этих вычислений мы построили для критерия Бенявского семейство предельных огибающих, представленных на рис. 1.11, где заштрихованная область представляет собой допустимые границы изменения паспорта прочности. Нетрудно убедиться, что все предельные огибающие по критерию Бенявского при росте шарового тензора выходят за пределы допустимой границы.

Таким образом, резюмируя, следует указать, что эмпирический критерий прочности Бенявского не пригоден для описания прочности пород при отрицательных напряжениях, а в области сжатия просто некорректен, и только на отдельных участках диаграммы Мора предельные огибающие обладают физическим смыслом, что все же мало приемлемо с точки зрения научного обоснования и требований практики.

#### **1.1.3.4 Критерий прочности Хоека-Брауна**

Самым удобным и распространенным в настоящее время эмпирическим критерием прочности, широко применяемым в зарубежной расчетной практике, считается критерий Хоека-Брауна [18], предложенный в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} (m \sigma_3 / \sigma_{ci} + s)^a, \quad (1.33)$$

где  $\sigma_{ci}$  - прочность на одноосное сжатие ненарушенных горных пород (в образце);

$m$  и  $s$  – безразмерные константы материала и показатель степени  $a$ , ранее принимаемый равным 0,5, корректируются с помощью эмпирических уравнений:

$$m = m_i \exp\left(\frac{GSI - 100}{28 - 14D}\right); \quad s = \exp\left(\frac{GSI - 100}{9 - 3D}\right), \quad a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(e^{-GSI/15} - e^{-20/3}), \quad (1.34)$$

где новые эмпирические константы  $m_i$ ;  $GSI$ ;  $D$  определяются в соответствии с особыми экспериментальными натурными и лабораторными методиками, которые призваны их связать со свойствами, структурными особенностями, степенью трещиноватости, взрывной поврежденностью и релаксационными особенностями пород.

Чтобы получить прочность породы в массиве на одноосное сжатие, надо положить в уравнении (1.33) минимальное главное напряжение равным нулю  $\sigma_3 = 0$ ;

$$\sigma_c = \sigma_{ci} s^a. \quad (1.35)$$

Таким образом, параметр  $s$  в критерии Хоека-Брауна исполняет роль учета степени нарушенности массива и снижения его прочности на сжатие по сравнению с образцом. Если в том же уравнении (1.33) создать двухосное равномерное растяжение  $\sigma_1 = \sigma_3 < 0$ ; то массив разрушится, когда они достигнут уровня прочности на растяжение, что получаем, приравнявая в (1.33) выражение в скобках нулю:

$$\sigma_p = \sigma_{ci} s / m. \quad (1.36)$$

По аналогии с выражением (1.35), где постоянная  $s$  исполняет роль показателя нарушенности массива, можем определить прочность на одноосное растяжение ненарушенного образца породы как  $\sigma_{pi} = \sigma_{ci} / m$ ; таким образом, физический смысл постоянной  $m$  – это соотношение предела прочности на одноосное сжатие к пределу прочности на растяжение ненарушенной породы (в образце).

С учетом этих соотношений запишем критерий Хоека-Брауна в более удобном и универсальном виде, для чего напряжения разделим на прочность на одноосное растяжение (получим приведенные напряжения), постоянную  $s$  примем равной  $s = 1$  (что равносильно рассмотрению ненарушенных пород), показатель степени примем равным  $a = 0,5$ , (поскольку в критерии он незначительно отличается от этого значения) и воспользуемся уравнением (1.36).

Чтобы убедиться в правомерности принятия показателя  $a = 0,5$ , достаточно проанализировать его зависимость от определяющего показателя  $GSI$ , предложенную Хоеком в виде последнего уравнения (1.34), по графику рис. 1.12.

Из графика видно, что только при весьма малых значениях параметра  $GSI$  показатель  $a$  несколько превышает значение 0,5, к которому затем очень быстро стремится по мере увеличения  $GSI$ . Поэтому с практической точки зрения можно всегда принимать  $a = 0,5$ .

В результате некоторых упрощений критерия Хоека-Брауна, которые устраняют промежуточные постоянные и не изменяют его смысл,

мы получим следующий удобный для анализа вид критерия (в приведенных напряжениях, т.е. разделенных на прочность одноосного растяжения):

$$\sigma_1 = \sigma_3 + m(\sigma_3 + 1)^{0.5}. \quad (1.37)$$

Выполним анализ этого критерия, построив для этого предельные кривые прочности в координатах главных напряжений и указав предельные границы изменения условного коэффициента трения  $f_0$ , которые, как мы установили ранее, являются границами «физического смысла» всех критериев прочности.

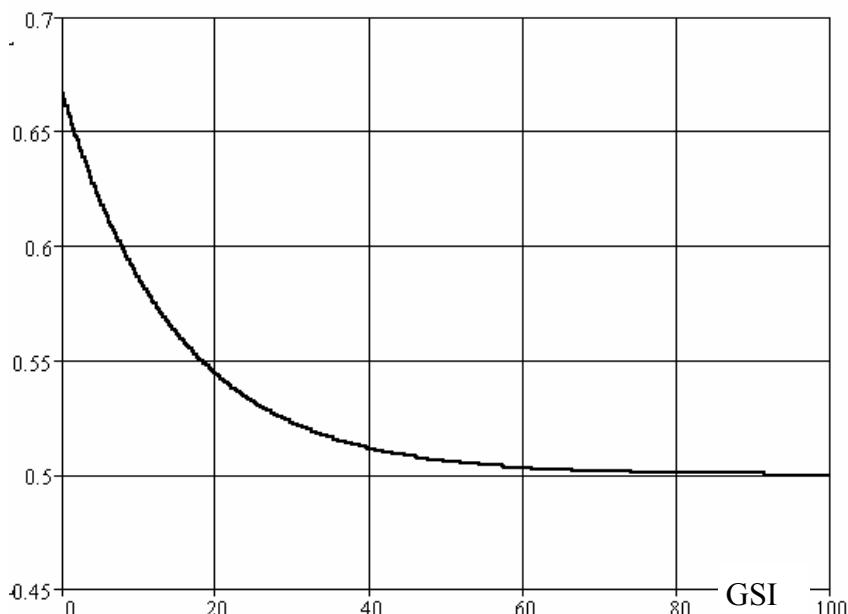


Рис. 1.12 – Пределы изменения показателя степени  $\alpha$  в зависимости от параметра свойств массива  $GSI$  в критерии Хоека-Брауна

Данные расчетов приведены на рис. 1.13, где показано семейство предельных кривых критерия прочности Хоека-Брауна в относительных (приведенных) нормированных по прочности на одноосное сжатие координатах и граница допустимого значения угла внутреннего трения

Как видим из кривых на рис. 1.13, в основном критерий прочности Хоека-Брауна удовлетворяет системе неравенств, определяющих допустимые значения предельных кривых. Однако в случае малых значений прочности на одноосное растяжение предельные кривые выходят за рамки допустимых значений, и критерий перестает соответствовать реальному механизму разрушения. Это еще раз доказывает, как опасно полагаться на чисто эмпирический подход, который является альтернативным теоретическому лишь на первых стадиях исследования, и, как

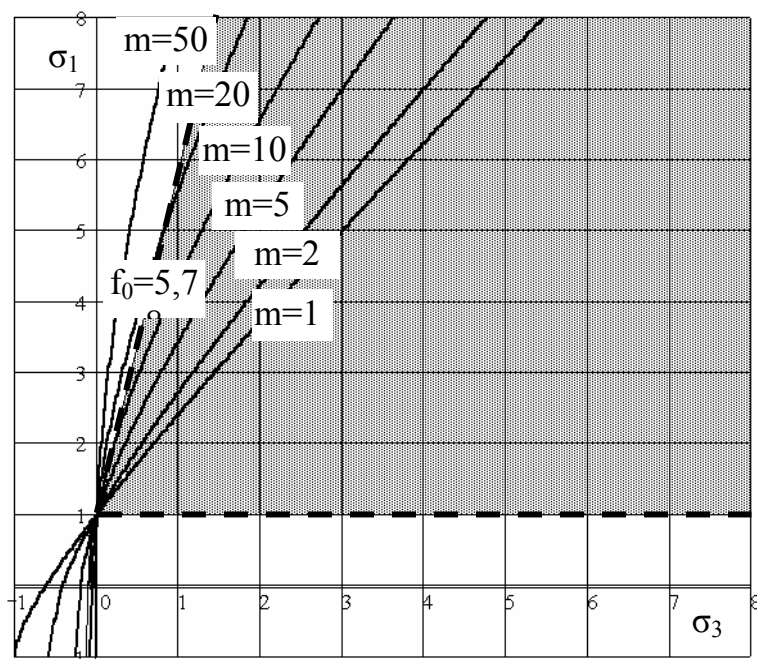


Рис. 1.13 – Семейство предельных кривых критерия Хоека-Брауна

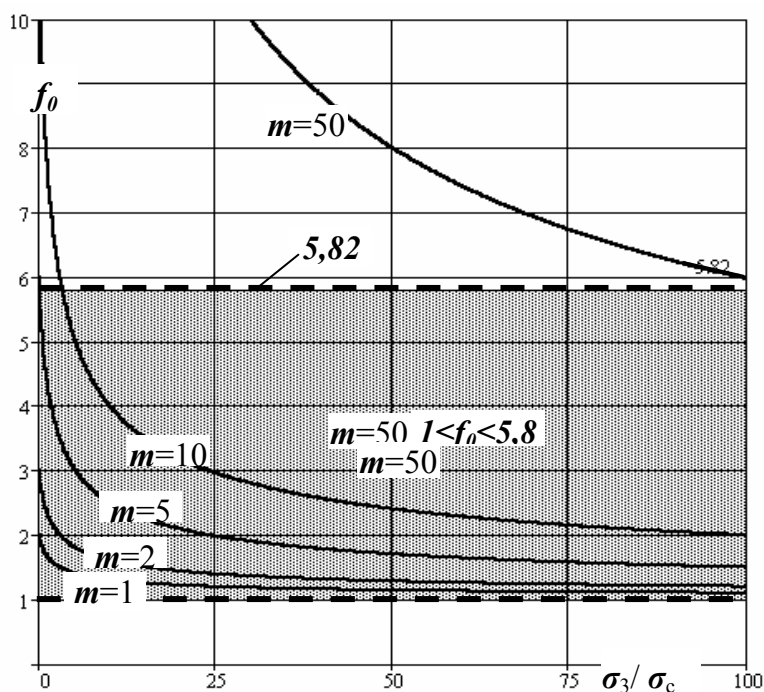


Рис. 1.14 – Графики изменения коэффициента угла внутреннего трения в критерии Хоека-Брауна

правило, пригоден лишь в узких пределах изменения опытных данных, при которых эмпирическая формула была получена.

Проследить за тем, как в критерии Хоека-Брауна меняется коэффициент внутреннего трения материала в зависимости от соотношения прочности на одноосное сжатие к прочности на одноосное растяжение (параметр  $m$ ) по мере роста минимальной компоненты  $\sigma_3/\sigma_c$  напряжений, можно по рис. 1.13.

Как видим, наклон предельной огибающей на диаграмме Мора полностью зависит от соотношения прочностей  $m$ , что само по себе теоретически неверно. Дело в том, что это соотношение зависит главным образом от структурного строения и не-



однородностей материала, чаще всего от наличия и ориентировки трещин разрыва и сдвига. Следовательно, в критерии по умолчанию принимается, что наличие трещиноватости прямым образом влияет на угол внутреннего трения материала, а это является неприемлемым с физической точки зрения

В более привычном представлении приведены графики паспортов прочности на диаграмме Мора (рис. 1.14). Здесь отчетливо видно, что крутизна паспорта прочности полностью определяется параметром  $m$ , -соотношением прочностей одноосного сжатия к одноосному растяжению материала. Более того, как видно из графиков, если параметр  $m$  достаточно велик, то угол внутреннего трения начинает превышать теоретический предел, равный 1, что недопустимо.

Семейство предельных огибающих (паспорта прочности) по критерию Хоека-Брауна в приведенных координатах  $\sigma/\sigma_c$  и  $\tau/\sigma_c$  при изменении параметра  $m$  на рис. 1.15 позволяет сделать важные выводы о правомочности применения критерия Хоека-Брауна.

Каждая из кривых семейства построена для своего значения параметра  $m$ , равного отношению прочности на одноосное сжатие к прочности на одноосное растяжение. Возрастание (снижение) параметра  $m$  можно трактовать как снижение (возрастание) прочности на одноосное растяжение по отношению к прочности на одноосное сжатие. Основная причина такого изменения прочности на растяжение – изменение внутренней структуры

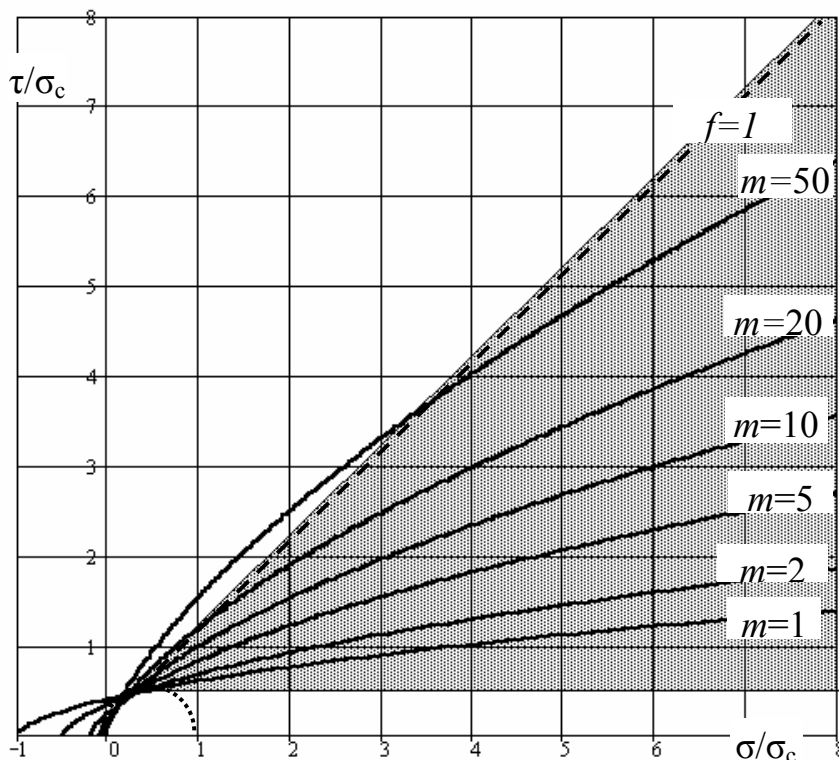


Рисунок 1.15 – Семейство паспортов прочности по критерию Хоека-Брауна для разных  $m$

материала (горной породы), что в первую очередь можно объяснить, как возрастание (снижение) степени трещиноватости материала. Чем больше у одного и того же материала содержится трещин (особенно трещин отрыва), тем меньше его прочность на растяжение, тогда как прочность на сжатие почти не претерпевает изменений.

Следовательно, чем больше трещин разрыва содержит горная порода, тем меньше ее прочность на одноосное растяжение, а, поскольку значительно увеличивается угол внутреннего трения, о чем свидетельствует рис. 1.14, то сопротивление сжимающим напряжениям резко возрастает. Таким образом, из критерия следует парадоксальный вывод: чем больше трещин в материале, тем выше его прочность на сжатие

Графики, представленные на рис. 1.13 - 1.15 показывают еще несколько недостатков эмпирической формулы Хоека-Брауна, которые невозможно исправить добавочными коэффициентами или иными эмпирическими поправками. В первую очередь, к ним можно отнести:

- при фиксированном значении прочности на сжатие и параметра  $m$  порода оказывается тем прочнее, чем меньше ее прочность на растяжение, что противоречит физическим принципам разрушения материала;
- из критерия Хоека-Брауна (1.33) невозможно получить прочность на одноосное растяжение, а материал всегда разрушается в условиях объемного многокомпонентного растяжения  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_p$ ;
- в критерии Хоека-Брауна невозможно принять  $m=1$ , что равнозначно условию  $\sigma_c = \sigma_p$ , которое может выполняться у идеально пластического материала с углом внутреннего трения, равным нулю (см. рис. 1.15), и критерий не способен правильно описывать условие прочности для пластичных материалов, у которых паспорт прочности параллелен оси нормальных напряжений на диаграмме О. Мора;
- недостижим по данному критерию и важный критерий прочности Кулона, представляющий идеально связное тело с прямолинейной огибающей наибольших кругов напряжений диаграммы О. Мора.

Подводя итог рассмотрения и анализа критерия прочности Хоека-Брауна, можно заключить, что он сыграл определенную роль в науке о прочности, заполнив брешь в описании прочностных свойств пород при многоосном нагружении. Однако, несмотря на большую популярность данного критерия на Западе (в первую очередь, странах англоязычной ориентации – Канада, США, Австралия, Индия, Южная Амери-

ка, Африка и др.), этот критерий обладает существенными недостатками и не может быть рекомендован для практического, а тем более теоретического, применения.

### **1.1.3.5 Критерий прочности А.Н. Шашенко**

Представляет несомненный интерес подход А.Н. Шашенко к получению критерия прочности [19], основанный на алгебраическом преобразовании второго тензора напряжений и вполне допустимого для однородных пород предположения о независимости прочности от промежуточного компонента тензора напряжений. В результате автором было получено в виде уравнения квадратной параболы следующее условие прочности (в несколько измененных обозначениях):

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma_c - \sigma_p)(\sigma_1 + \sigma_3) = \sigma_c \sigma_p, \quad (1.38)$$

где  $\sigma_c$ ;  $\sigma_p$  - пределы прочности на одноосное сжатие и растяжение соответственно.

Это уравнение ввиду своей простоты сыграло заметную роль в учебном процессе в вузах горного профиля, т.к. в доступной форме продемонстрировало «кухню» получения критерия прочности с помощью алгебраических методов, которые преобладали в классических теориях прочности и, особенно, в их «обобщениях».

Рассмотрим, как этот критерий способен воспроизвести простейшие идеализированные модели прочности материалов – идеально пластичные ( $\sigma_c = \sigma_p$ ;  $f = 0$ ), идеально сыпучие ( $\sigma_c = \sigma_p = 0$ ;  $f = Const$ ) и идеально связные ( $\sigma_c > \sigma_p \neq 0$ ;  $f = Const$ ).

Для идеально пластичной модели положим в (1.38) равенство прочностей на одноосное сжатие и растяжение  $\sigma_c = \sigma_p$ ;  $f = 0$ , что даст вырожденное уравнение предельной огибающей:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \sigma_c^2, \quad (1.39)$$

откуда получим два решения  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c$  и  $\sigma_1 - \sigma_3 = -\sigma_c$ , из которых первое действительно дает паспорт прочности идеально пластичного тела, а

второе условие следует отбросить, т.к. оно противоречит физическому смыслу.

Рассмотрим возможность описания этим уравнением идеально сыпучей среды, для чего подставим в (1.38) условие равенства нулю прочности на одноосное растяжение  $\sigma_p = 0$ :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_c(\sigma_1 + \sigma_3) = 0, \quad (1.40)$$

решением которого будут 2 уравнения предельных кривых:

$$\sigma_1 + \sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c; \quad (1.41)$$

Первое уравнение представляет собой условие чистого сдвига, а не паспорта прочности, и должно быть отброшено. Второе уравнение – это не что иное, как ранее полученное условие идеальной пластичности  $\sigma_c = \sigma_p$ ;  $f = 0$ , что противоречит исходной предпосылке  $\sigma_p = 0$  для сыпучей среды, а поэтому совершенно не совпадает с условием идеальной сыпучей среды  $\sigma_c = \sigma_p = 0$ ;  $f = \text{Const} > 0$ .

Не спасает положение, если для получения уравнения предельной огибающей идеально сыпучего тела подставить в исходное уравнение (1.38) равенство нулю прочности на одноосное сжатие  $\sigma_c = 0$  или даже одновременное равенство нулю обеих прочностей  $\sigma_p = 0$ ;  $\sigma_c = 0$ . В первом случае получаем такое же уравнение паспорта прочности идеально пластичного тела (1.40), а второй случай распадается на два одинаково неприемлемых уравнения: а) условие чистого сдвига  $\sigma_1 + \sigma_3 = 0$ , что не является предельной кривой и б) условие, образно выражаясь, предельной огибающей идеальной жидкости  $\sigma_1 - \sigma_3 = 0$ , а, по сути – закон Паскаля.

Таким образом, критерий прочности А.Н. Шашенко не отвечает условию описания сыпучей среды и идеально связного тела, подменяя их вырожденными уравнениями идеальной пластичности, или чистого сдвига и закона Паскаля, которые не являются предельными огибающими.

На рис. 1.16 можно видеть семейство предельных кривых по критерию прочности А.Н. Шашенко при изменении параметра  $\psi$ , равному отношению прочностей на одноосное растяжение и сжатие, а на рис. 1.17 – паспорта прочности по тому же критерию. На этом же

рисунке дан круг одноосного сжатия, которого касаются все предельные огибающие. Хотя общий вид паспортов прочности по критерию А.Н. Шашенко значительно лучше, чем в предыдущих критериях, однако все же можно видеть, что в нем воспроизводятся почти те же методические недостатки, присущие условию прочности Хоека-Брауна. Так, можно указать на то, что в критерии А.Н. Шашенко повторяется тот же парадокс

увеличения прочностных свойств породы (или материала) по мере увеличения в нем трещин растяжения (что ведет к снижению от этого прочности на одноосное растяжение и увеличению параметра  $\psi$ ). Из критерия следует, что чем меньше прочность на одноосное растяжение, тем выше прочность материала при прочих равных условиях. В этом критерии прочность на всесторонний разрыв всегда равна прочности на одноосное растяжение, что далеко не всегда подтверждается практикой.

Кроме того, для сильно трещиноватых или разрушенных пород при  $\sigma_p \rightarrow 0$  уравнение малоприспособно, т. к. в этом случае  $\sigma_1 = \sigma_c$ , что равносильно утверждению о наличии прочности на одноосное сжатие у сыпучего материала.

Таким образом, несмотря на явные преимущества критерия прочности А.Н. Шашенко для

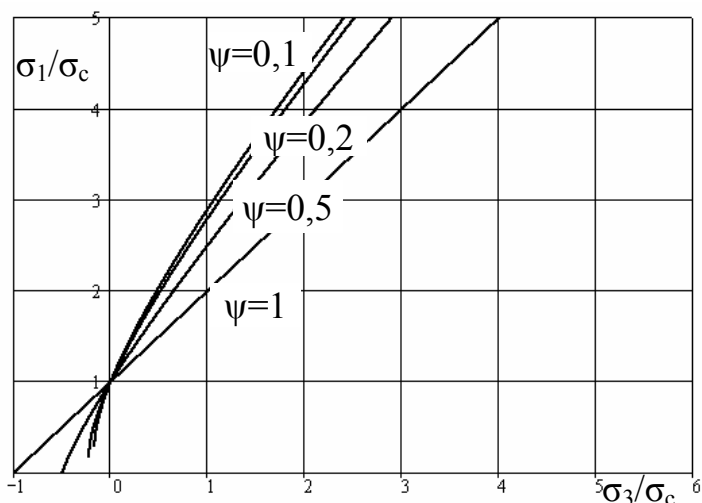


Рис. 1.16 –Критерий Шашенко в приведенных координатах  $\sigma_1/\sigma_c$  и  $\sigma_3/\sigma_c$

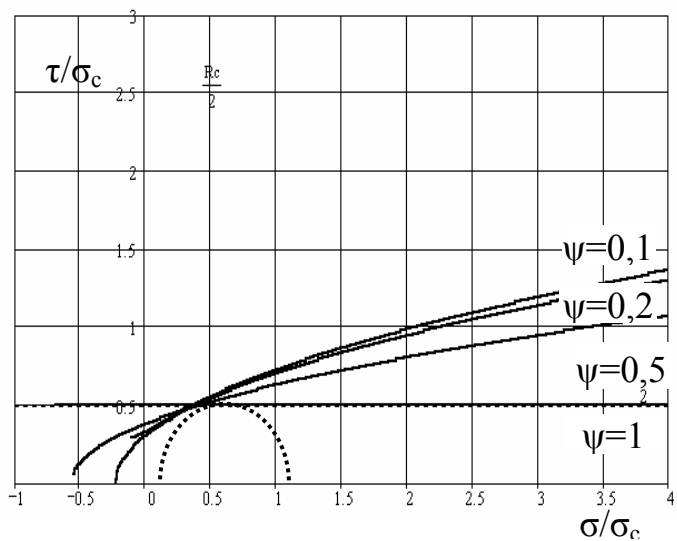


Рис. 1.17 –Паспорта прочности по критерию Шашенко в приведенных координатах  $\sigma/\sigma_c$  и  $\tau/\sigma_c$

горных пород перед ранее рассмотренными (его простота, свойство воспроизводить идеальную пластичность, доступность), следует, однако признать, что присущие ему недостатки заставляют при его использовании соблюдать большую осторожность.

## **1.2 ПРОЧНОСТЬ В МЕХАНИКЕ ТРЕЩИННОГО РАЗРУШЕНИЯ**

Как известно, к основным факторам, оказывающим влияние на прочность горных пород и материалов, относятся их структурное строение (в первую очередь степень трещиноватости и наличие поверхностей ослаблений), напряженное состояние и предыстория нагружения. В связи со сложностью учета всех этих и множества дополнительных факторов (влаги, скорость приложения нагрузки, температура и пр.), не удается удовлетворительно обобщить результаты экспериментальных исследований, многие из которых являются уникальными и трудно воспроизводимыми (например, испытания пород в стабиллометрах).

Механика хрупкого разрушения горных пород изучает закономерности развития отдельных трещин в хрупких материалах и горных породах, а ее возникновение было стимулировано исследованиями А. Гриффитса [20], проведенными в 1920 г. В основу механики трещин было положено предположение Гриффитса о том, что разрушение идеально упругого тела происходит всегда хрупко. Эти исследования были выполнены как ответ на запросы практики, когда многочисленные разрушения в промышленности и строительстве происходили при нагрузках, много меньших предела прочности, что заставляло пересмотреть подходы к описанию механизмов разрушения и не считать более предел прочности как константу материала. После некоторого периода застоя интерес к этой проблеме в 50-х гг. прошлого столетия резко возрос, что было обусловлено участвовавшими разрушениями, в ряде случаев – катастрофическими, целого ряда ответственных массивных и крупных конструктивных объектов (лопатки турбин, крылья самолетов, мосты, корпуса кораблей и др.). Тем не менее, следует констатировать, что, несмотря на достижения теории, практическое значение исследований в этом направлении относительно невелико.

Основным объектом исследования механики хрупкого разрушения является трещина, однако причины и условия ее возникновения не рассматриваются, т.к. эта проблема выходит за пределы компетенции

механики разрушения как раздела механики деформируемого твердого тела (МДТТ).

Задача Гриффитса сводилась к рассмотрению равновесия идеально упругой бесконечной пластины под действием односторонних растягивающих напряжений. В теле перпендикулярно действующим напряжениям находится плоская тонкая трещина размером  $l$ . Целью исследования являлось определение критического уровня растягивающих напряжений, при которых размер трещины начнет возрастать. Гриффитс решал задачу с помощью энергетического подхода, полагая, что упругая система с трещиной будет в равновесии, если вариация полной энергии в системе равна нулю (что соответствует минимуму полной энергии системы).

Удельная потенциальная энергия деформации пластины без трещины под действием растягивающих напряжений равна  $u_0 = \sigma^2 / 2E$ , где  $E$  – модуль Юнга. Поскольку толщина пластины равна 1, то энергия приходится на единицу площади пластины. При наличии трещины удельная потенциальная энергия существенно отличается от исходной ввиду примыкающей к трещине зоны с высокой концентрацией напряжений. Чтобы учесть это обстоятельство, упругая энергия в пластине с трещиной будет пропорциональна исходной энергии  $u_0 = \sigma^2 / 2E$  с учетом площади с возмущенным полем напряжений, что можно учесть в виде множителя  $kl^2$ , где  $k$  – некоторый поправочный коэффициент. Окончательно полная потенциальная упругая энергия пластины с трещиной длиной  $l$  будет равна

$$U = k\sigma^2 l^2 / 2E . \quad (1.42)$$

При образовании трещины необходимо затратить работу на образование двух поверхностей длины  $l$  и единичной ширины, что, с учетом значения плотности поверхностной энергии берегов трещины  $\gamma$  [дж/м] позволит записать для работы  $A$ :

$$A = 2\gamma l , \quad (1.43)$$

а полная энергия всей системы равна разности (алгебраической сумме) энергий  $U$  (1.42), которая накапливается и  $A$  (1.43), которая затрачивается:

$$\Sigma U = A - U = 2\gamma l^2 - k\sigma^2 l^2 / 2E \quad (1.44)$$

При изменении длины  $l$  трещины условием минимума полной энергии системы, которое соответствует ее равновесию, является равенство нулю производной полной энергии по  $l$ , т.е.

$$\frac{\partial(\Sigma U)}{\partial l} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial l}(A - U) = \frac{\partial}{\partial l}(2\gamma l - k\sigma^2 l^2 / 2E) = 2\gamma - k\sigma^2 l / E = 0, \quad (1.45)$$

откуда можно определить предельное значение напряжений, после которого будет нарушено равновесие системы, т.е. трещина начнет двигаться:

$$\sigma_0 = \sqrt{2\gamma E / kl} \quad (1.46)$$

Это и есть знаменитая формула Гриффитса: если задана некоторая длина трещины  $l$ , то можно найти соответствующее этой длине предельное разрушающее напряжение  $\sigma_0$ , и наоборот, если задано какое-то растягивающее напряжение, то из (1.46) можно определить критическую длину трещины, приводящую к разрушению материала.

Апофеозом развития механики хрупкого разрушения в нашей стране можно считать монографию Г.П. Черепанова [21], где подведен своеобразный итог полувекового развития этой ветви МДТТ и приведены почти все главные результаты, полученные исследователями к тому времени. В механике хрупкого разрушения оценка прочности материала производилась путем рассмотрения особенностей его сопротивления образованию трещины (как правило, - одной!).

В целях дальнейшего рассмотрения для нас будет особенно важным изучение процессов, происходящих в материале с трещинами. Как известно, трещина является сильным концентратором напряжений и в окрестности ее вершины происходят сложные физические явления, в результате которых материал переходит в пластическое состояние. Разрушение материала с такими трещинами называют в механике хрупкого разрушения квазихрупким, что впервые исследовали Ирвин и Орован [21]. Они предложили ввести в теорию понятие эффективной поверхно-



стной энергии, которая учитывает неявным образом возникновение пластических зон в вершине трещин [22, 23].

Особенно важную роль в теории выполняют коэффициенты интенсивности напряжений [24]  $k_I, k_{II}, k_{III}$ , с помощью которых можно определить напряжения и деформации материала в окрестности трещин нормального разрыва, поперечного сдвига и продольного сдвига. Поэтому простейшее предположение о локальном разрушении в материале с трещинами, сделанное Г.П. Черепановым [21], состоит в том, что начало разрушения (критерий прочности) определяется некоторой функцией от этих параметров, которая описывает замкнутую поверхность, охватывающую начало координат

$$F(k_I, k_{II}, k_{III}) = 0, \quad (1.47)$$

при попадании на которую концов векторов  $k_I, k_{II}, k_{III}$  в соответствующей точке контура трещины происходит разрушение. Если конец вектора находится в некоторой внутренней точке области, то разрушения не происходит (аналог поверхности разрушения).

Функцию (1.47), которая представляет собой весьма сложное условие прочности, предлагается определять по экспериментальным данным, а для разного типа трещин критерий локального разрушения принимает следующий вид:

нормальный разрыв  $k_I = k_{Ic}; k_{II} = k_{III} = 0$ ;

поперечный сдвиг  $k_{II} = k_{IIc}; k_I = k_{III} = 0$ ;

продольный сдвиг  $k_{III} = k_{IIIc}; k_I = k_{II} = 0$

где  $k_{Ic}, k_{IIc}, k_{IIIc}$  - некоторые постоянные материала, связанные с его трещиностойкостью.

В рамках линейной и нелинейной механики хрупкого разрушения были получены значительные результаты большим числом исследователей, в том числе и отечественных. Однако, как было отмечено выше, практические результаты на этом направлении были не очень заметны.

Многочисленными экспериментами было показано, что во многих случаях критические значения параметров, определяющих предельное состояние материала, становятся зависимыми от условий нагружения. В этих случаях формулировка предельных условий разрушения выполняется зачастую традиционным методом – введением многочис-

ленных эмпирических зависимостей и поправочных коэффициентов. Таким образом, теория хрупкого разрушения была низведена до уровня эмпирических, с теоретических позиций плохо объяснимых, поправок.

Принципиальными методическими трудностями этого направления исследований разрушения материалов является весьма сложная формулировка критериев прочности и практически невозможность теоретически решить задачи прочности для реальных трещин в материале. Наиболее изученными в механике разрушения оказались только трещины *нормального разрыва*. Единственная теоретическая упругая плоская задача о напряжениях в окрестности трещины продольного сдвига была получена Г.П. Черепановым [21].

### **1.3 ТРЕБОВАНИЯ К ТЕОРИЯМ ПРОЧНОСТИ**

Поведение большинства горных пород и других материалов под действием внешних нагрузок удовлетворительно согласуется с большинством критериев прочности и их теоретическим описанием, основанном на механических моделях или общих положениях механики твердого деформируемого тела. Однако там, где критерии прочности являются функциями тензора напряжений или его инвариантов, они не дают удовлетворительного объяснения наблюдаемому разбросу механических характеристик и пределов прочности. Это связано с тем, что существующие механические описания не учитывали изменения свойств среды, влияние скорости и, вообще, истории нагружения, наличие и уровень исходной поврежденности материала, его структурную нарушенность и т.д. В стороне от большинства из теоретических описаний критериев прочности остался такой важный феномен, как масштабный фактор, способный изменить показатели прочности в несколько раз.

Как видим, развитие учения о прочности материалов постоянно находится в стадии решения все более сложных задач, при этом накопленный опыт их решения и анализ предложенных теорий прочности и критериев разрушения дает возможность перейти к формулированию достаточно общих требований, которым должна отвечать любая теория прочности. Такого рода требования высказывались в разных вариантах многими исследователями, - М.М. Протодяконовым-младшим, К.В. Руппенейтом, В.Н. Ионовым, Г.С. Писаренко, М.М. Филоненко-

Бородичем, А.П. Филиным, Е. Хоеком и др. [1, 8,9,13,16, 18]. Среди этих требований были аксиоматически правильные, но встречались и спорные, а в некоторых случаях и неверные. Мы не будем проводить их сравнительный анализ, - это, скорее всего, задача истории механики, - и завело бы нас в достаточно неопределенные и небесспорные рассуждения. Поэтому здесь мы попытаемся сформулировать требования к критериям прочности исходя из собственного понимания проблемы. В чем-то эти требования совпадут, в чем-то дополнят, а ряде случаев и дадут новые трактовки этого сложного вопроса.

Итак, к числу основных требований, которым должен отвечать критерий прочности, с нашей точки зрения можно отнести следующие:

- четко отражать определенную механическую модель процессов разрушения материала, обоснованную с теоретических позиций и опирающуюся на современные представления физики и механики разрушения;

- учитывать исходное структурное состояние материала, связанное с его предысторией нагружения и приобретенными в связи с ней структурными повреждениями;

- определять однозначным образом условия разрушения материала при любом напряженном состоянии;

- включать минимальное количество показателей, отражающих прочностные свойства среды и ее механическое состояние, причем они должны иметь явно выраженный физический смысл, связанный с принятой механической моделью разрушения материала и его свойствами;

- показатели прочности материала должны быть постоянными и допускающими свое определение из ограниченного количества и доступных экспериментальных макро- или микроиспытаний;

- позволять идентифицировать один и тот же материал в разных структурных состояниях путем сопоставления его базовых прочностных свойств;

- в качестве частных случаев включать в область своего описания известные теоретические идеализации прочностных свойств материала (идеальная пластичность, идеально сыпучее тело, идеально связное тело), а также экспериментально доказанные и отраженные в ранее известных теоретических критериях феномены поведения материала под нагрузкой;

– естественным образом учитывать основные прочностные особенности различных материалов: отличие пределов прочности на растяжение и сжатие, наличие различного рода структурных неоднородностей в виде открытых и закрытых трещин, поверхностей ослабления, наличие включений с другими упругими и прочностными свойствами и т.д.;

– быть теоретически «открытыми», т.е. не быть «тупиковыми» разработками в виде эмпирических или полуэмпирических уравнений, а позволять естественно производить дальнейшие углубления и обобщения с целью получения более обоснованных механических моделей поведения материалов в условиях произвольного механического воздействия (масштабный фактор, кусочно-неоднородное строение, предыстория нагружения, учет фактора времени и скорости нагрузки, связь с упругими и пластическими деформациями и пр.).

Следует отметить, что пока ни одна из теорий прочности в полной мере не отвечает всему набору требований, которые здесь сформулированы. В определенном смысле эти требования можно рассматривать как своего рода критерии, по которым можно судить о достоинствах и недостатках различных теорий прочности.

Исходя из сформулированных требований, возникает вполне закономерный гносеологический вопрос, перерастающий в философско-методологическую проблему – существует ли единая теория прочности, способная удовлетворить всей совокупности требований, предъявляемых к ней (по умолчанию принимаем, что в этих требованиях не содержится внутренних, взаимно исключающих противоречий)? Насколько правильно предположение, что таких теорий прочности, каждая со своим единственным критерием или их набором, может быть несколько, и они могут сосуществовать, взаимно дополняя и корректируя друг друга?

С нашей точки зрения, такой множественности (или, в простейшем случае, - дуализма) теорий прочности быть не может. С гносеологической точки зрения множественность правильных, не совпадающих друг с другом, ответов на один и тот же вопрос, - в том числе и о критерии прочности материалов, - соседствует с агностицизмом, т.е. отрицанием возможности познания объективной реальности. Вся история развития науки в частности, и человеческой цивилизации вообще, свидетельствует об обратном. А вот возможность одновременного существо-

вания нескольких не вполне правильных (или во многом неправильных) теорий вполне допустима. Именно так обстоит дело с наукой о прочности сегодня. Но здесь возникает еще одна проблема – как отличить одну теорию от другой, насколько каждая из них правильнее? Эта проблема выбора среди неправильных или не вполне правильных теорий нам кажется принципиально неразрешимой в однозначном виде. Каждая из сопоставляемых теорий может давать среди банально правильных и фатально ошибочные ответы, причем их невозможно отличить от верных до тех пор, пока не явится более мощная и глубокая по смыслу и идеям механическая модель поведения материала под нагрузкой.

Тем не менее, сформулированные требования к критериям прочности материалов могут дать ориентировочную оценку тем или иным теориям прочности и предлагаемым в их контексте критериям. Для этого следует, во-первых, нормализовать все требования с позиций предельной конкретности и «измеримости» (хотя бы в виде ответов «да» и «нет»). Во-вторых, дать их ранжировку по «важности» (например, в виде соотношений приоритетности) и, наконец, в-третьих, - произвести нормировку. В системе этого предлагаемого метода оценок, в общем-то, произвольных доктрин или теорий можно произвести их сравнительное сопоставление. Однако следует иметь в виду, что такое сопоставление является чисто формальным и не очень продуктивным.

Поэтому самым правильным подходом при оценке любой теории, в том числе и прочности, является один из старых и мощных принципов с момента рождения научной методологии – теория отвергается, как только обнаружился хотя бы один факт, которому она противоречит. В дальнейшем этой точки зрения будем придерживаться в данной работе и мы.

## **2 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ**

### **2.1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ**

#### **2.1.1 Формальные принципы построения теории прочности**

Как известно, критерии прочности в настоящее время удобно представлять на диаграмме О. Мора в виде предельной огибающей наибольших кругов напряжений [1]. Именно такая форма представления оказалась наиболее наглядной для большинства приложений. Каким же принципам должна отвечать предельная огибающая, которая должна описать все особенности поведения материала (горной породы) под нагрузкой? Некоторые из этих принципов были предложены в ряде исследований [1,8,11,13,15 и др.]. Не со всеми авторами можно согласиться по этому вопросу. В частности К.В. Руппенейт [14] полагал, что предельная огибающая должна пересекать ось нормальных напряжений под прямым углом, что, в общем случае, неверно. Так случилось, что это утверждение [14] дезориентировало целое поколение отечественных исследователей, - теоретиков и экспериментаторов, - в области свойств горных пород и массив, в какой-то мере задержав становление отечественной науки о прочности горных пород.

Чтобы избежать подобных казусов, представим основные принципы, которым не должна противоречить предельная огибающая напряжений диаграммы Мора (рис. 1.7) для сплошного однородного материала, в таком виде:

- предельная огибающая должна представлять собой поверхность, симметричную оси нормальных напряжений, с вершиной в области растягивающих напряжений и простирается в бесконечность (вплоть до перехода материала в другое агрегатное состояние) в сторону сжимающих напряжений;

- форма кривой должна быть в виде однополостного тела вращения или замкнутого тела с ребрами, ограничивающими грани в виде гладких криволинейных поверхностей;

- предельная огибающая должна быть выпуклой и монотонной согласно постулату Ильюшина - Дракера [9], в противном случае возможно недопустимое по физическому смыслу пересечение предельного круга и предельной огибающей кругов напряжений диаграммы О. Мора;
- предельная поверхность должна включать в себя как частные теоретические случаи конус Кулона, призму Треска и цилиндр Мизеса;
- поверхность должна быть пригодна для представления прочности тел с различными пределами прочности на растяжение и сжатие;
- при монотонном изменении каждого из показателей прочности материала должна монотонно изменяться и предельная поверхность прочности, причем последовательно построенные таким образом поверхности не должны пересекаться друг с другом;
- пересечение поверхности с осью нормальных напряжений возможно под углом, не превышающим прямого, причем, как правило, прочность на объемное растяжение должна быть не менее прочности на одноосное растяжение;
- в области сжимающих напряжений на участке, где предельная огибающая находится за точкой касания круга одноосного сжатия, ее угол наклона к оси нормальных напряжений не должен превышать 45 градусов (коэффициент угла внутреннего трения должен быть менее 1).

### **2.1.2 Об основополагающих предпосылках теории прочности**

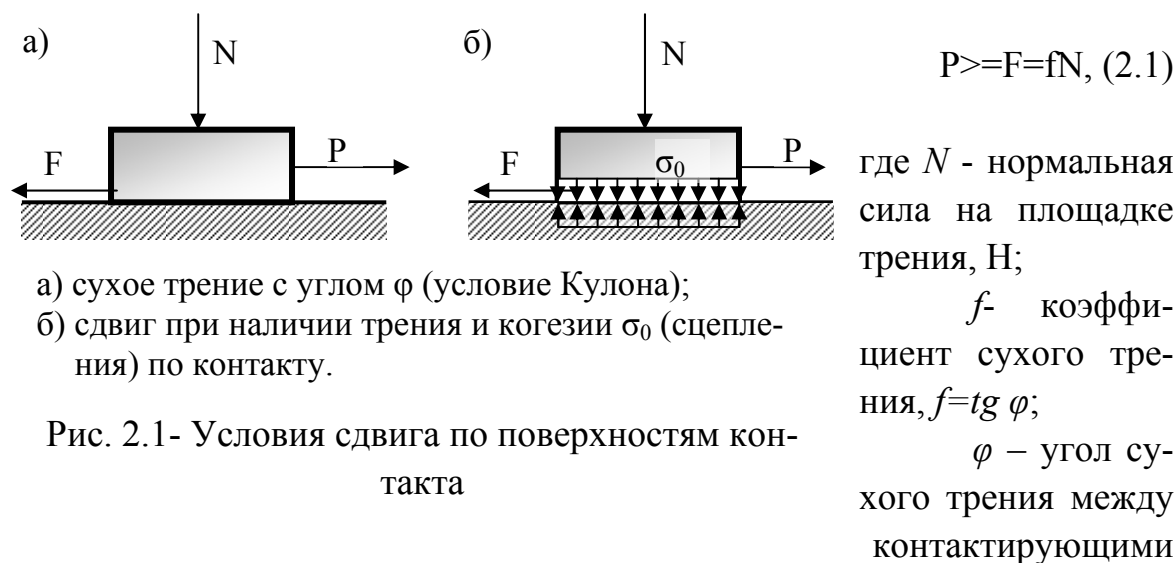
Рассмотрим теоретические предпосылки получения обобщенного критерия прочности твердого материала (в том числе горной породы). Будем исходить из того, что разрушение сдвигом происходит путем образования многочисленных сдвиговых микродефектов в сочетании с опережающими их разрывами. В совокупности сдвиги и разрывы, возникающие в теле, образуют многочисленные рассеянные по всему объему материала Z-дефекты.

Наука, изучающая законы зарождения, роста и залечивания микродефектов во времени и происходящие при этом изменения свойств и состояния материала при внешних на него воздействиях, называется реономной микромеханикой [28, 29]. Эта наука пытается описать все сложные процессы деформирования и разрушения материалов на основе решения систем дифференциальных кинетических уравнений, которые отражают на микроуровне процессы изменения внутренней струк-

туры тела, состоящие из элементарных актов зарождения и залечивания различных микродефектов.

Для разработки новой теории прочности необходимо воспользоваться рядом положений реономной микромеханики и отказаться от ставших традиционными воззрений. В данной работе будет отброшено одно, но весьма далеко ведущее ограничение, по умолчанию принятое во всех существующих теориях прочности – старое представление о внутреннем трении материала. Для этого вновь вернемся к истоку теории прочности, основанной на рассмотрении явно заданной физической модели разрушения. Одной из первых таких теорий прочности следует признать теорию прочности Кулона (см. п.1.1).

Сущность известной теории прочности Кулона-Мора состоит в применении закона сухого трения Кулона (а правильнее – Амонтона, который первый сформулировал закон сухого трения) для твердых тел. Согласно этому закону, сдвиг по некоторой плоскости, на которой нет сцепления, происходит тогда, когда сила  $P$  преодолевает предельное значение силы трения  $F$  (рис. 2.1а):



поверхностями.

Если разделить полученное уравнение (2.1) на площадь контакта  $A$ , где есть сухое трение, получим тот же закон в напряжениях:

$$\tau_{nt} = \frac{P}{A} \geq \frac{F}{A} = \frac{fN}{A} = f\sigma_n, \quad (2.2)$$

что, по сути, дает уравнение паспорта прочности *идеально сыпучего* материала (типа песка) без сцепления. Отметим важный вариант записи



(2.1), на который не обращали внимания – постоянство угла внутреннего трения и его дифференциальную запись (1.,6):

$$f = \frac{d\tau_{nt}}{d\sigma_n} = Const$$

Рассмотрим несколько более сложную модель, развивающую исходную модель сдвига Кулона (рис. 2.1б). Пусть в материале есть *когезия разрыва*. Это с физической точки зрения не что иное, как *сцепление* между частицами, которое равно как бы всестороннему внутреннему сжатию материала напряжениями  $\sigma_0$  (не путать со сдвиговой когезией  $\tau_0$ !). Иными словами, материал с когезией разрыва  $\sigma_0$  следует рассматривать как тело, в котором соседние частицы прижаты (сцеплены, притянуты) друг к другу напряжением  $\sigma_0$ . Поэтому когезию  $\sigma_0$  часто (особенно в теории зернистых сред) называют удельной силой сцепления или пределом прочности материала на всестороннее растяжение. Геометрически на диаграмме О. Мора когезия  $\sigma_0$  – это отрезок, отсекаемый (при  $\tau_{nt} = 0$ ) паспортом

прочности на оси  $\sigma$  (рис. 2.2). Здесь показаны разные идеализированные паспорта прочности: 1 – идеально связанное тело ( $f=Const$ ;  $\sigma_0 \neq 0$ ;  $\tau_0 \neq 0$ ); 2 – идеально пластичное тело ( $f=0$ ;  $\tau_0 = Const$ ); 3 – идеально сыпучий материал ( $f=Const$ ;  $\sigma_0 = \tau_0 = 0$ )

На поверхности возможного сдвига в материале со сцеплением когезию разрыва  $\sigma_0$  следует прибавить к нормальным напряжениям  $\sigma_0 + \sigma_n$ , что, после подстановки в (1.6), дает уравнение паспорта прочности *идеально связанного* материала:

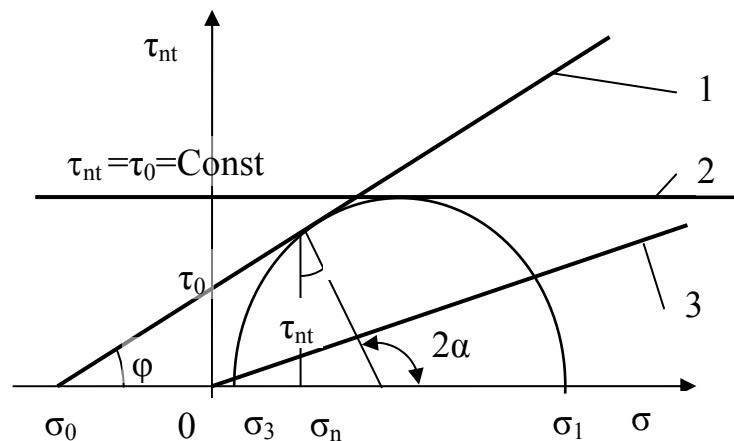


Рис 2.2 – Паспорт прочности идеализированных материалов на диаграмме О.Мора:

$$\tau_{nt} = (\sigma_n + \sigma_0)f = \sigma_n f + \tau_0, \quad (2.3)$$

где  $\tau_0 = \sigma_0 f$  - когезия *сдвига*, МПа, причем из рис. 2.1 коэффициент трения равен  $f = \tau_{nt} / (\sigma_n + \sigma_0)$ .

При  $f=0$  внутреннее трение отсутствует, тогда из (2.3) следует  $\tau_{nt} = \tau_0$ , т.е. уравнение паспорта прочности *идеально пластичного* материала. Все эти три паспорта прочности представлены на диаграмме О. Мора (рис. 2.2). Если  $\sigma_0=0$ ,  $\tau_0=0$  и  $\varphi>0$ , – получим идеально сыпучий материал (идеальный песок), если  $\tau_0>0$  и  $\varphi=0$  и, – это идеально пластичный материал (типа влажной глины), если, наконец,  $\sigma_0>0$ ,  $\tau_0>0$  и  $\varphi>0$  – это идеально связный материал (линейная идеализация твердых материалов со сцеплением).

В главных напряжениях паспорт прочности идеально связного тела принимает вид (его можно получить из простейших геометрических построений на паспорте прочности рис. 2.2):

$$\sigma_1 = S\sigma_3 + \sigma_c \quad (2.4)$$

где  $S = (1 + \sin\varphi) / (1 - \sin\varphi) = \tan^2(45 + \varphi/2)$  - параметр угла  $\varphi$  внутреннего трения;

$\sigma_c = S\sigma_0$  - предел прочности материала на *одноосное сжатие*, МПа.

Угол *внутреннего* трения  $\varphi$  для твердого материала исторически был введен по аналогии с углом трения идеально сыпучего материала (песка). С геометрической точки зрения – это угол наклона предельной огибающей наибольших кругов напряжений диаграммы Мора (паспорта прочности) к оси нормальных напряжений в некоторой точке (см. рис. 2.2).

Уже начальная механическая модель простого сдвига содержит ряд важных умолчаний. В частности, такое сложное физико-механическое явление, как трение, представлено только одним коэффициентом трения  $f$ , причем независимым ни от нормальной силы, ни от скорости движения. По сути, это - линейный коэффициент пропорциональности между нормальной силой и силой сопротивления (трения). Это условие, как мы увидим в дальнейшем, далеко не бесспорное, получило повсеместное признание и никем в теории прочности до настоящего времени не подвергалось сомнению, а тем более пересмотру.

Второе существенное умолчание состоит в том, что сопротивление сдвигу зависит только от нормальной компоненты вектора силы,

ибо трудно вразумительно объяснить модель трения, у которой сопротивление сдвигу зависит от нормальной компоненты вектора силы, перпендикулярной направлению возможного сдвига и параллельной плоскости сдвига. Действительно, это становится очевидным, если принять во внимание, что такая сила не производит работы при сдвиге. Отметим, что это физически очевидный факт является весьма важным и имеет далеко идущие следствия.

Итак, мы тем самым явно выдвигаем аксиому, утверждающую, что промежуточная компонента тензора напряжений не оказывает влияния на условия сдвига на площадке разрушения. Простейшая модель сдвига, основанная на реальной физической картине, полностью поддерживает основополагающий постулат об отсутствии влияния промежуточного напряжения на прочность. Следует упомянуть, что в пользу альтернативного утверждения, - о необходимости учета влияния промежуточного напряжения на прочность, - до настоящего времени никакой механической модели предложено не было, да и вряд ли в будущем это удастся сделать. Тем самым область поисков и обоснований физически оправданной теории прочности значительно сужается, т.к. отпадает необходимость в построении сложных аналитических выражений с участием промежуточного главного напряжения. Приняв эту точку зрения, мы тем самым ставим под сомнение правомочность большинства «усовершенствований» теории Кулона-Мора, направленных на учет влияния полного тензора напряжений, включая промежуточное главное напряжение, на прочность.

Чтобы окончательно внести ясность в эту проблему, рассмотрим, каким образом предложено учитывать влияние промежуточного напряжения на прочность материала в существующих теориях прочности. Для этого возьмем критерий прочности Губера-Мизеса (1.4):

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_r,$$

и оценим влияние промежуточной компоненты напряжений на критерий прочности, подставив три наиболее важных случая коэффициента Лодэ в (1.4) :

а)  $\mu = -1$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3$  (обобщенное растяжение)

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_3\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_c;$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \pm\sigma_c; \quad \text{где при } \sigma_3 = 0 \quad \sigma_1 \leq \pm\sigma_c;$$

б)  $\mu = 0$ ,  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  (обобщенный сдвиг)

$$\sqrt{\sigma_1^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2/4 + \sigma_3^2 - \sigma_1(\sigma_1 + \sigma_3)/2 - \sigma_3(\sigma_1 + \sigma_3)/2 - \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_c;$$

где при  $\sigma_3 = 0$  получим  $\sigma_1 \leq \pm\sqrt{2}\sigma_c$ ;

в)  $\mu = 1$ ,  $\sigma_2 = \sigma_1$  (обобщенное сжатие)

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_1 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_c;$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \pm\sigma_c; \quad \text{где при } \sigma_3 = 0 \quad \sigma_1 \leq \pm\sigma_c.$$

Из этих преобразований следует, что при двух крайних значениях промежуточного главного напряжения  $\sigma_2 = \sigma_3$  (обобщенное растяжение) и  $\sigma_2 = \sigma_1$  (обобщенное сжатие), мы получаем одинаковое условие прочности, причем такое же, как и в критерии Кулона для идеально пластичного материала, где промежуточное напряжение не учитывается. В случае обобщенного сдвига  $\mu = 0$ ,  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  необъяснимым (исходя из физической сути прочности) образом прочность материала увеличивается в 1,41 раза! Такая зависимость прочности от промежуточного главного напряжения в виде экстремума при чистом обобщенном сдвиге совершенно не согласуется с физическими условиями разрушения и не может быть представлена ни одной из существующих или возможных механических моделей.

Подводя итог изложенному, мы можем с достаточной степенью достоверности утверждать, что при построении реальной теории прочности учитывать влияние на прочность промежуточной компоненты тензора напряжений *не следует*. Это решает многолетний спор о принципиальном подходе при создании теорий прочности, позволяет использовать реальные механические модели для описания процесса разрушения.

### 2.1.3 Физические процессы роста трещин при разрушении

Реальные горные породы, естественные и искусственные материалы по разному проявляют себя в условиях эксплуатации под воздействием внешней среды, в первую очередь, систем внешних нагрузок. Для прогнозирования поведения сооружений и конструкций из различных материалов необходимо установить причины возникновения и протекания процессов разрушения в зависимости от влияния многочисленных факторов (внешняя среда, силовые и деформационные воздействия, температура, структура и внутреннее строение материала и пр.). Поэтому так важно установить критические пределы работоспособности материала и конструкции в целом (особенно для подземных сооружений), найти способы и пути повышения их эксплуатационной надежности. Классический подход к моделированию прочности материалов сводился к постулированию, иногда не вполне обоснованному, определенных условий, при выполнении которых происходит разрушение материала и потеря несущей способности конструкции. В настоящее время, в противовес классическому подходу следует большее значение придавать изучению особенностей самого процесса разрушения.

Новая теория прочности должна основываться на реальной механической модели разрушения, в основу которой положена модель образования и развития микротрещин в материале. По нашему мнению, в самом начале в исходном материале субмикротрещины уже существуют как результат термофлуктуационных процессов. Это положение достаточно убедительно обосновано в кинетической теории развития трещин [25]. Термофлуктуационная природа межатомных или межмолекулярных перегруппировок и активирующее влияние механических напряжений, понижающих высоту энергетического барьера, может быть положена в основу построения механической модели разрушения. Дальнейшее развитие теоретических предпосылок разрушения, основанных на кинетической термофлуктуационной концепции, было выполнено в ряде работ автора, которые вылились в создание реономной микромеханики деформирования и разрушения твердых тел [26, 27, 28, 29].

В границах современных представлений о процессах в твердом теле, основанных на учете его молекулярного строения и теплового движения атомов, даже при относительно средних условиях колебаниях атомов с частотой  $10^{12}$ - $10^{13}$  с<sup>-1</sup> при среднем уровне кинетической энергии на каждую степень свободы  $E=kT/2$  (где  $k$  - постоянная Больцмана,

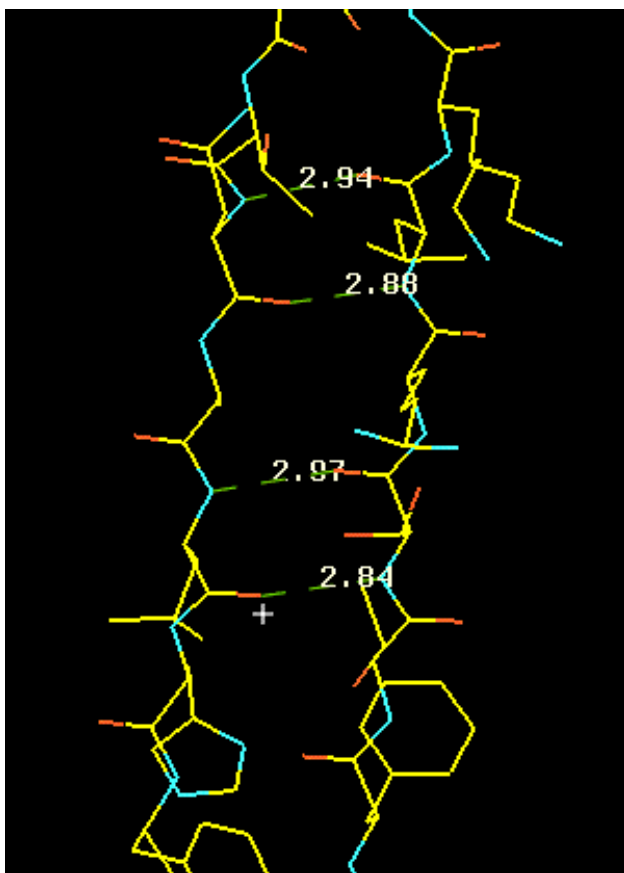


Рис. 2.2а - Водородные связи определяют строение и свойства многих веществ (изображение с сайта [ruppweb.dyndns.org](http://ruppweb.dyndns.org))

ми<sup>1</sup> было обнаружено, что в трещине между двумя твердыми поверхностями может образовываться сеть из водородных связей, которая живет по своим особым законам. Водородная связь занимает особое место среди всех типов химических связей. Она обеспечивается атомом водорода, расположенным между двумя электроотрицательными ионами (например, атомами кислорода), которые оттягивают на себя электронное облако. Если бы на месте водорода был *любой другой атом*, то потеря одного электрона не сильно изменила бы его размер. В случае водорода потеря электрона оборачивается катастрофой: вместо атома остается один лишь протон — частица размером в одну стотысячную размера атома. Атом водорода словно исчезает, и поэтому два электроот-

$T$  - абсолютная температура), силу отрыва можно оценить величиной  $(2...4) \cdot 10^{-9}$  Н на одну связь, или 15-30 ГПа [24].

В то же время среднее усилие теплового прыжка атома можно оценить величиной  $F=E/\Delta r$ , где  $\Delta r$  — удлинение межатомной связи при тепловой флуктуации, которая в условиях комнатной температуры 20-25<sup>0</sup> С приблизительно равна 0,001 мм. Это дает для среднего уровня тепловых усилий из-за температурных флуктуаций величину 10 ГПа, которая вполне сравнима с усилиями отрыва.

Весьма интересное явление возникает на границе берегов трещины (рис. 2.2а).

Последними исследования-

<sup>1</sup> <http://elementy.ru/trefil/57>

рицательных атома могут сильно приблизиться друг к другу. Это делает водородные связи, с одной стороны, довольно крепкими, а с другой стороны, очень подвижными и «маневренными»: они легко образуются, легко видоизменяются и восстанавливаются.

Почему же водородные связи так влияют на силу трения? Между двумя неподвижными поверхностями образуется густая сеть из таких связей, мелкие детали которой зависят от конкретного расположения двух шероховатых поверхностей. Можно сказать, что в состоянии покоя на границе соприкосновения двух поверхностей возникает «двумерный кристалл» из водородных связей, которые дополнительно удерживают тело от проскальзывания. Если всё же произойдет сдвиг — связи разорвутся, но из-за своей высокой подвижности вскоре воссоединятся вновь. Это можно представить себе как резкое «плавление» кристалла из водородных связей, а затем его рекристаллизацию.

Для нас важным из этих концепций является то, что образование и рост трещин разрыва и скольжения сопровождается сложными молекулярными, электрохимическими и термомеханическими явлениями, в особенности, с повышением температуры. В устье растущей трещины сдвига и разрыва помимо термофлуктуационных явлений идут особые процессы скольжения под давлением, местная (локальная) температура превышает температуру плавления материала и там возникает жидкостное трение. Жидкостное трение может возникать и на контакте берегов трещины вне ее устья. Даже обычные трещины, рассматриваемые в рамках механики разрушения, для развития и обобщения идеи Гриффитса начали рассматривать с учетом квазипластического поведения материала в окрестности вершины трещины. А пластичность, как известно, происходит в виде жидкостного трения, что предполагает равенство нулю коэффициента трения. Экспериментальные исследования показывают, что процесс разрушения материалов на всех стадиях всегда сопровождается пластической деформацией, т.к. абсолютно хрупкое разрушение невозможно. Утверждение Н.Н. Давиденкова и А.В. Степанова о том, что зарождение трещины в кристаллических средах невозможно без участия пластических деформаций, полностью подтверждается экспериментально [9].

Пластические деформации приводят к скоплению дислокаций и большому искажению кристаллической решетки в окрестности сдвига [30]. Эти деформации дают скачок тока в  $10^{10}$  раз (по сравнению с его

значениями в области упругой деформации), образование заряда высокого потенциала, который постепенно релаксирует после прекращения пластического течения. Такое явление обычно называют эффектом А.А. Степанова. Еще более мощные изменения сопутствуют раскалыванию диэлектрика: плотность зарядов в момент раскалывания достигает  $10^{12}$  электр./см<sup>2</sup>, что соответствует порогу ионизации окружающего воздуха, т.е. напряженности электрического поля  $10^8$  В/см. Иногда при разрушении можно заметить вспышки светового излучения, а при разрушении в вакууме берега трещины испускают электроны весьма высоких энергий – более  $10^8$  эВ [31]. В конечном итоге вся эта энергия рассеивается в виде тепла возле кончика растущей трещины, способствуя нагреванию и, в конечном счете – плавлению материала (породы).

Распространение трещины в материале, таким образом, сопровождается значительной пластической зоной, которая в ряде случаев настолько велика, что для нее можно считать справедливыми соотношения макроскопической теории пластичности. Однако если возникновение пластической зоны при образовании и росте трещины рассматривалось ранее с позиций динамических эффектов и вязкости разрушения [9], то мы в данной работе акцентируем внимание на необходимости учета этого явления при рассмотрении условий разрушения материала в трещинах, когда на части их площади в явном виде возникают условия жидкостного трения.

Поэтому, в отличие от представлений о сухом трении Кулона (а точнее – Амонтона), положенном в основу теории прочности О. Мора, мы считаем, что на площадке сдвига реализуется одновременно два механизма трения - сухое и жидкостное. Удобно выразить долю сухого трения на сдвиговых площадках параметром  $\alpha$ , который назовем показателем хрупкости ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

#### 2.1.4 Сущность новой теории прочности

В классической теории прочности О.Мора (рис. 2.2) при наличии когезии разрыва  $\sigma_0$  коэффициент внутреннего трения постоянен и, в соответствии с геометрической интерпретацией производной, равен (обозначения те же):

$$f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{d\tau_{nt}}{d\sigma_n} = \frac{\tau_{nt}}{\sigma_n + \sigma_0} = \operatorname{Const}, \quad (2.4)$$



Угол внутреннего трения  $\varphi$  для твердого материала исторически был введен по аналогии с углом трения идеально сыпучего материала (песка). С геометрической точки зрения – это угол наклона предельной огибающей наибольших кругов напряжений диаграммы Мора (паспорта прочности) к оси нормальных напряжений  $\sigma$  в некоторой точке.

Соотношение (2.4) связывает в виде условия прочности два фундаментальной важности утверждения: первое - в виде дифференциальной записи коэффициента трения на паспорте прочности (рис. 2.2), а второе – как предельное соотношение сдвигающих и нормальных напряжений при сдвиге в предположении сухого трения на площадке сдвига (рис. 2.1). Следует подчеркнуть, что в дифференциальном виде условие прочности ранее никогда не записывалось.

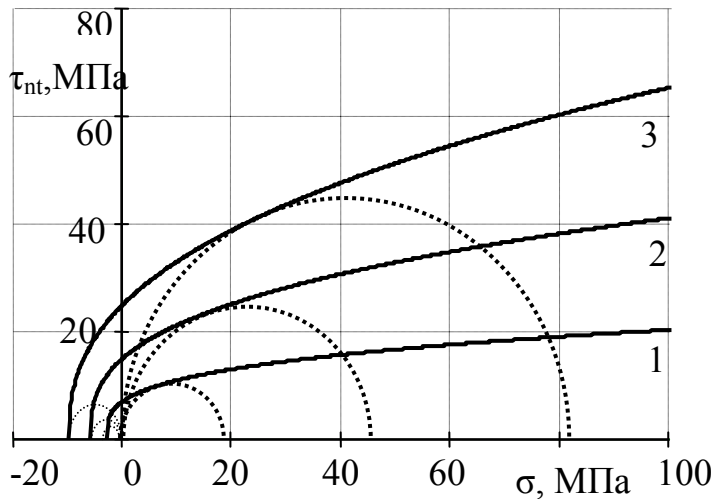
Мы будем исходить из более сложного, но теоретически более обоснованного и общего соотношения, учитывающего, что в материале на дефектах сдвига, в результате сложных физических, термохимических и электрических явлений возникает не только сухое, но и жидкостное трение. Для этого уравнение прочности (2.4) запишем в дифференциальном виде и введем в него новый показатель - параметр хрупкости  $\alpha$ :

$$f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{d\tau_{nt}}{d\sigma_n} = \frac{\alpha \tau_{nt}}{\sigma_n + \sigma_0} = \operatorname{var} . \quad (2.5)$$

Здесь параметр хрупкости  $\alpha$  имеет четко выраженный физический смысл и показывает, на какой части площади сдвига происходит сухое трение  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Решая дифференциальное уравнение (2.5) и определяя постоянную интегрирования из естественного условия, что при отсутствии нормальных напряжений  $\sigma_n = 0$  на предельной площадке касательное напряжение должно быть равно когезии сдвига  $\tau_{nt} = \tau_0$ , получим

$$\tau_{nt} = \tau_0 \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^\alpha , \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) является критерием прочности однородного материала (горной породы), который представлен для типичных пород Донбасса в виде обобщенных огибающих на диаграмме О. Мора на рис.



- 1 – аргиллит  $\alpha = 0,3; \sigma_0 = 3 \text{ МПа}; \tau_0 = 7 \text{ МПа}$ ;  
 2 – алевролит  $\alpha = 0,35; \sigma_0 = 6 \text{ МПа}; \tau_0 = 15 \text{ МПа}$ ;  
 3 – песчаник  $\alpha = 0,4; \sigma_0 = 10 \text{ МПа}; \tau_0 = 25 \text{ МПа}$ .

Рис. 2.3 - Общий вид паспортов прочности типичных пород Донбасса

2.3. На этом же рисунке показаны пределы прочности различных пород на одноосное сжатие и растяжение в виде наибольших кругов напряжений диаграммы О. Мора, касающихся оси ординат.

Расчеты показывают, что задание трех параметров  $\sigma_0, \tau_0, \alpha$  вполне достаточно для описания любого типа паспорта прочности. При  $\alpha = 0$  получим паспорт прочности идеально

пластической породы с прямолинейной огибающей, параллельной оси  $\sigma$ . Если  $\alpha = 1$ , паспорт прочности вырождается в прямолинейную огибающую для идеально связного (хрупкого) материала с постоянным углом внутреннего трения, равным  $\varphi_0 = \arctg(\tau_0 / \sigma_0)$ .

Большинство горных пород обладают показателем хрупкости  $\alpha < 0,5$ , когда огибающая паспорта прочности пересекает ось  $\sigma$  под прямым углом. При  $\alpha < 0,5$  когезия и предел прочности на одноосное растяжение совпадают, что существенно упрощает вычисление параметров паспорта по экспериментальным данным. Если,  $\alpha > 0,5$  то этот угол оказывается меньше прямого, прочность на всестороннее растяжение оказывается больше прочности на одноосное сжатие, что хотя и встречается у горных пород, но реже.

Поскольку при выводе критерия прочности приходится использовать дифференциальные соотношения между параметрами, а окончательное выражение для критерия можно получить лишь после соответствующей формулировки условий сдвига в материале, учитывающей, как мы увидим позже, его структурное строение, в виде дифференциального уравнения, предложенную теорию прочности

можно назвать, в отличие от существующих, как *аналитическую* теорию прочности.

Экспериментально параметры паспорта прочности в аналитической теории можно определить, испытав горную породу на одноосные растяжение  $\sigma_p$  и сжатие  $\sigma_c$ , а также используя тот факт, что угол внутреннего трения при одноосном сжатии пород  $\varphi_c$  достаточно хорошо известен. Так, например, для разных пород он изменяется в довольно узких пределах:

для аргиллитов (глинистых сланцев)  $\varphi_c = 18 - 22^\circ$ ;

для алевролитов (песчанистых сланцев)  $\varphi_c = 23 - 27^\circ$ ;

для песчаников  $\varphi_c = 27 - 33^\circ$ .

Формулы для определения параметров обобщенного паспорта прочности горной породы легко можно вывести из диаграммы О.Мора и они имеют вид:

$$\sigma_0 = \sigma_p; \quad (2.7)$$

$$\alpha = 2\sigma_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi_c \cdot P / (\sigma_c \cdot \operatorname{Cos} \varphi_c); \quad (2.8)$$

$$\tau_0 = \sigma_0 \cdot \operatorname{Cos}(\varphi_c) \cdot P^{-\alpha} / 2, \quad (2.9)$$

где  $P$  - вспомогательная переменная, равная

$$P = \sigma_c (1 - \operatorname{Sin} \varphi_c) / 2\sigma_p + 1. \quad (2.10)$$

В общем случае достаточно три произвольных прочностных показателя породы (материала), определенных экспериментально, чтобы путем решения системы трех трансцендентных уравнений (2.7-2.10) вычислить все искомые параметры обобщенного паспорта прочности. Подобные системы уравнений обычно решают с помощью популярных вычислительных программ (MathCAD, MathLAB и др.) на компьютере.

Пределы численных значений параметров обобщенной огибающей для различных типов пород Донбасса в зонах средней степени метаморфизма представлены в табл. 1.1.

С увеличением хрупкости горных пород параметр хрупкости  $\alpha$  возрастает, однако, как правило, для большинства пород он меньше 0.5. Следовательно, прочность на одноосное растяжение совпадает с когезией разрыва. В то же время соотношение между когезиями разрыва и сдвига может меняться в достаточно широких пределах, но, как прави-

ло, для пластичных пород  $\tau_0 \leq \sigma_0$ . Лишь для весьма разрушенных трещинами пород  $\tau_0 > \sigma_0$ . Поэтому сопоставление когезий сдвига и разрыва может дать полезную информацию о степени нарушенности породы различными дефектами.

Таблица 1.1 - Параметры прочности для типичных пород Донбасса

| Тип породы | Показатели прочности |                  |                  | Параметры огибающей |                  |                |
|------------|----------------------|------------------|------------------|---------------------|------------------|----------------|
|            | $\phi$ , град        | $\sigma_c$ , МПа | $\sigma_p$ , МПа | $\alpha$            | $\sigma_0$ , МПа | $\tau_0$ , МПа |
| Аргиллиты  | 18-22                | 1-4              | 30-40            | 0,2-0,30            | 1-4              | 5-10           |
| Алевриты   | 23-27                | 3-8              | 30-80            | 0,3-0,4             | 3-8              | 7-20           |
| Песчаники  | 28-32                | 5-12             | 50-150           | 0,4-0,45            | 5-12             | 10-40          |

## 2.2 ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ ТРЕЩИНОВАТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Известно, что горная порода обладает микродефектностью, а массив горных пород имеет сложную структуру, которая включает в себя различного рода поверхности ослабления. Если с помощью геофизических исследований и геологических изысканий удалось установить степень нарушенности массива трещинами, то у нас появляется ранее недоступная в других теориях прочности возможность рассчитать прочность массива (или любого материала) на основании данных о степени его трещиноватости.

В качестве математической модели будем (на первом этапе) рассматривать горную породу как квазиоднородный материал с рассеянными по его объему дефектами в виде случайным образом разнонаправленных микротрещин. Введем, следуя Л.М. Качанову [2], понятие сплошности породы  $0 \leq \psi \leq 1$ . Ее можно трактовать как часть площади породы по некоторому направлению, сохранившую исходные прочностные свойства, т.е. оставшуюся неразрушенной. Остальную часть площади  $\omega = 1 - \psi$  называют поврежденностью. При  $\psi = 1$  порода бездефектна, при  $\psi = 0$  наступает полное разрушение.

Перейдем к составлению дифференциального уравнения прочности для микродефектного материала (горной породы) со сплошностью  $\psi$ . Можно утверждать, что на неразрушенных участках материала будет справедливо уравнение (2.6). На участках с поврежденностью  $\omega$

также реализуется сухое трение с жидким проскальзыванием, характеризуемое параметром хрупкости  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Однако когезия разрыва  $\sigma_0$  здесь преодолена и ее роль выполняют участки со сплошностью  $\psi$ , «прижимающие» соседние берега трещин со средним напряжением, равным  $\sigma_0 \cdot \psi$ .

Если породы разбиты хаотическими трещинами, причем они открытые (с несомкнутыми берегами), то это равнозначно уменьшению когезии отрыва на величину  $\sigma_0 \cdot \psi$  и увеличению истинных напряжений до уровня  $\sigma_n / \psi$  и  $\tau_{nt} / \psi$  (эффективные напряжения). Тогда обобщенное уравнение прочности массива можно записать следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\tau_{nt}}{d\sigma_n} = \psi \frac{\alpha \tau_{nt} / \psi}{\sigma_n / \psi + \sigma_0} = \psi \frac{\alpha \tau_{nt}}{\sigma_n + \sigma_0 \psi}, \quad (2.11)$$

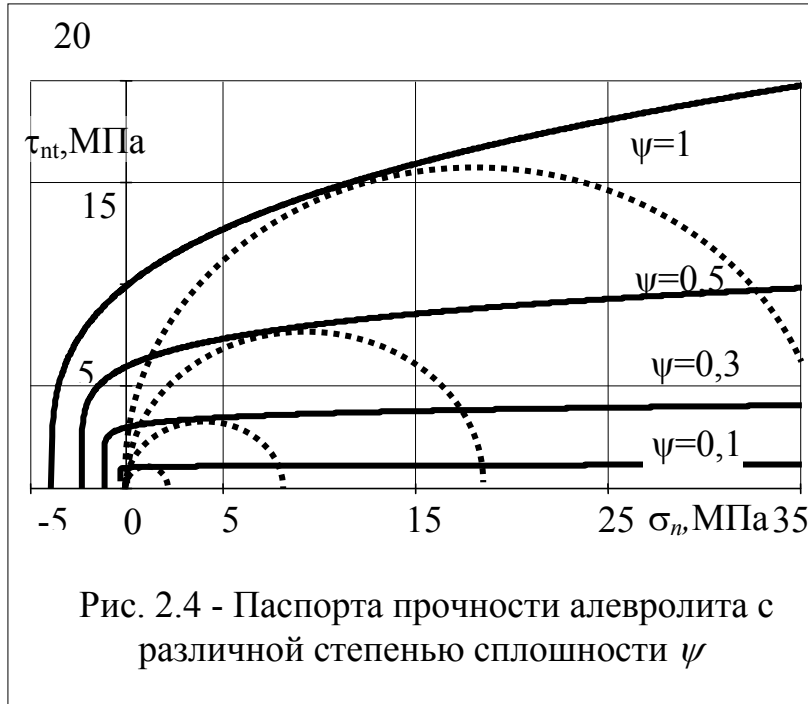
решением которого, с учетом граничного условия  $\tau_{nt} = \tau_0 \psi$  при  $\sigma_n = 0$ , будет:

$$\tau_{nt} = \tau_0 \psi \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0 \psi} + 1 \right)^{\alpha \psi}. \quad (2.12)$$

Таким образом, получили уравнение обобщенного паспорта прочности трещиноватого массива, нарушенного хаотически расположенными трещинами, у которых берега раскрыты. Как видим, при наличии открытых трещин все прочностные показатели материала уменьшаются путем умножения на сплошность  $\psi = 1 - \omega_0 < 1$ , где  $\omega_0 < 1$  - поврежденность, т.е. удельная площадь, занятая открытыми трещинами.

Подобным образом решаются и более сложные задачи расчета прочности свойств массива с самими разнообразными трещинами и условиями изменения сплошности  $\psi$ .

На рис. 2.4 можно проследить, как изменяется паспорт прочности алевролита ( $\sigma_0 = 4$ ,  $\tau_0 = 10$ ,  $\alpha = 0,4$ ), если в нем увеличивается число открытых трещин, что вызывает уменьшение сплошности  $\psi$  породы.



Здесь также показаны круги пределов прочности алевролита на одноосное сжатие.

Для массива, содержащего закрытые трещины сдвига, когда нормальное напряжение  $\sigma_n$  на площадках сдвига остается неизменным, а сопротивление сдвигу на трещинах, пло-

щадь которых измеряется поврежденностью материала  $\omega_s = 1 - \psi_s < 1$  и неповрежденных (сплошных) участках материала  $\psi_s$  различается, дифференциальное уравнение прочности будет состоять из двух слагаемых. Первое слагаемое - это условие для внутреннего трения на участках сплошности  $\psi_s$ , а второе - на участках сдвига  $\omega_s = 1 - \psi_s$ . При этом нормальное напряжение на участке сдвига будет складываться из внешнего напряжения  $\sigma_n$  и части когезии отрыва  $\sigma_0 \psi_s$ :

$$\frac{d\tau_{nt}}{d\sigma_n} = \psi_s \frac{\alpha \tau_{nt}}{\sigma_n + \sigma_0} + \omega_s \frac{\alpha \tau_{nt}}{\sigma_n + \sigma_0 \psi_s}, \quad (2.13)$$

Уравнение паспорта прочности такого массива после решения (2.13) получаем в виде:

$$\tau_{nt} = \tau_0 \psi_s \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^{\alpha \psi_s} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0 \psi_s} + 1 \right)^{\alpha \omega_s}. \quad (2.14)$$

Следует отметить, что если сплошность  $\psi = 1$  (бездефектная порода), то уравнение (2.14) переходит в (2.12), а если  $\psi = 0$  (полностью разрушенная порода), то получаем после предельного перехода паспорт идеально сыпучего (при  $\alpha = 1$ ) материала  $\tau_{nt} = \tau_0 \sigma_n / \sigma_0$ . Это уравнение

идеально сыпучего материала (песка) с коэффициентом трения  $f = \tau_0 / \sigma_0$ .

Если массив разбит трещинами обеих типов, - разрыва  $\omega_0$  и сдвига  $\omega_s$ , то, вводя соответствующие обозначения для сплошностей и поврежденностей  $\psi = 1 - \omega_0 - \omega_s$ ;  $\psi_s = 1 - \omega_s$ ;  $\psi_o = 1 - \omega_0$ ; получим дифференциальное уравнение прочности:

$$\frac{d\tau_{nt}}{d\sigma_n} = \psi \frac{\alpha\tau / \psi_o}{\sigma_n / \psi_o + \sigma_0} + \omega_s \frac{\alpha_s\tau / \psi_o}{\sigma_n / \psi_o + \sigma_0\psi}, \quad (2.15)$$

что приводит к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными и граничными условиями  $\tau_{nt} = \tau_0\psi$  при  $\sigma_n = 0$

$$\frac{d\tau_{nt}}{\tau_{nt}} = \alpha\psi \frac{d\sigma_n}{\sigma_n + \sigma_0\psi_o} + \alpha_s\omega_s \frac{d\sigma_n}{\sigma_n + \sigma_0\psi\psi_o},$$

а его решение будет иметь вид:

$$\tau_{nt} = \tau_0\psi \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0\psi_o} + 1 \right)^{\alpha\psi} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0\psi\psi_o} + 1 \right)^{\alpha_s\omega_s}. \quad (2.16)$$

В этом критерии прочности первый множитель отражает влияние открытых трещин, а второй – закрытых, а  $\alpha_s$  - параметр хрупкости на берегах сомкнутых трещин. В частности, если в трещинах имеется заполнитель или влага, то это учитывается соотношением  $\alpha_c < \alpha$ . Нетрудно убедиться прямой подстановкой, что из уравнения (2.16) следуют уравнения (2.12) и (2.14).

Несмотря на сложный вид полученных уравнений прочности, их использование не представляет труда и находится в компетенции обычного горного инженера.

Новая теория прочности, которую на основании ее главного отличительного признака, - необходимость составления дифференциального уравнения исходя из механической модели разрушения, есть основание назвать аналитической (дифференциальной) теорией прочности.

## 2.2.1 Закономерности разрушения трещиноватых массивов

Рассмотрим более подробно особенности разрушения материалов в соответствии с аналитической теорией прочности. Важным достоинством этой теории является уникальная возможность исследовать поведение трещиноватых материалов во всем диапазоне напряженных состояний. До настоящего времени решение подобных задач считалось сопряженным с непреодолимыми математическими и вычислительными трудностями. Такая точка зрения была обусловлена тем, что задачу теории прочности в расширенном понимании ставили как задачу об определении напряженного состояния с учетом каждой существующей трещины, причем начало разрушения требовало учета изменений границ этих трещин и сложных эффектов взаимодействия между ними.

В противовес этому в рамках аналитической теории прочности стало возможным найти решение дифференциального уравнения прочности микродефектного материала в самом общем виде, т.е. с учетом наличия в нем открытых трещин  $\omega_0$  и закрытых трещин  $\omega_s$ . При этом учтем, что на открытых трещинах трение отсутствует (нет контактов между берегами), а на закрытых трещинах когезия разрыва  $\sigma_0$  равна нулю, но проявляется сухое и жидкостное трение, соотношение между которыми отражено показателем хрупкости  $\alpha$

### 2.2.1.1 Прочность массива с открытыми трещинами

На основании сформулированных выше посылок можно записать дифференциальное уравнение аналитической теории прочности для пород с трещинами:

$$\frac{d\sigma_n}{d\tau_{nt}} = \alpha \tau_{nt} \left[ \frac{\psi}{\sigma_0 + \frac{\sigma_n}{1 - \omega_0}} + \frac{\omega_s}{\sigma_0 \psi + \frac{\sigma_n}{1 - \omega_0}} \right] \quad (2.17)$$

Первое слагаемое правой части (2.17) отражает условие внутреннего трения на ненарушенной части площадки сдвига с учетом эффективного нормального напряжения, т.е. уменьшения площади за счет открытых трещин  $\omega_0$ . Второе слагаемое описывает внутреннее трение на участках закрытых трещин  $\omega_s$ , где когезия отрыва отсутствует, но бере-



га трещин сжаты эффективным нормальным напряжением и когезией, оставшейся на сплошных участках.

Решением этого уравнения, с учетом очевидного граничного условия: при  $\sigma_n=0$  касательное напряжение равно  $\tau_n=\psi\tau_0$ , будет

$$\tau_{nt} = \psi\tau_0 \left[ \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0(1-\omega_0)} + 1 \right)^\psi \cdot \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0(1-\omega_0)\psi} + 1 \right)^{\omega_s} \right]^{\alpha(1-\omega_0)}, \quad (2.18)$$

где  $\psi=1-\omega_0-\omega_s$  - сплошность материала на площадке, по которой возможен сдвиг.

На рис. 2.5 показаны графики паспорта прочности горной породы, у которой задана различная степень развития открытых трещин.

Поведение материала при увеличении площади открытых трещин характеризуется следующими закономерностями:

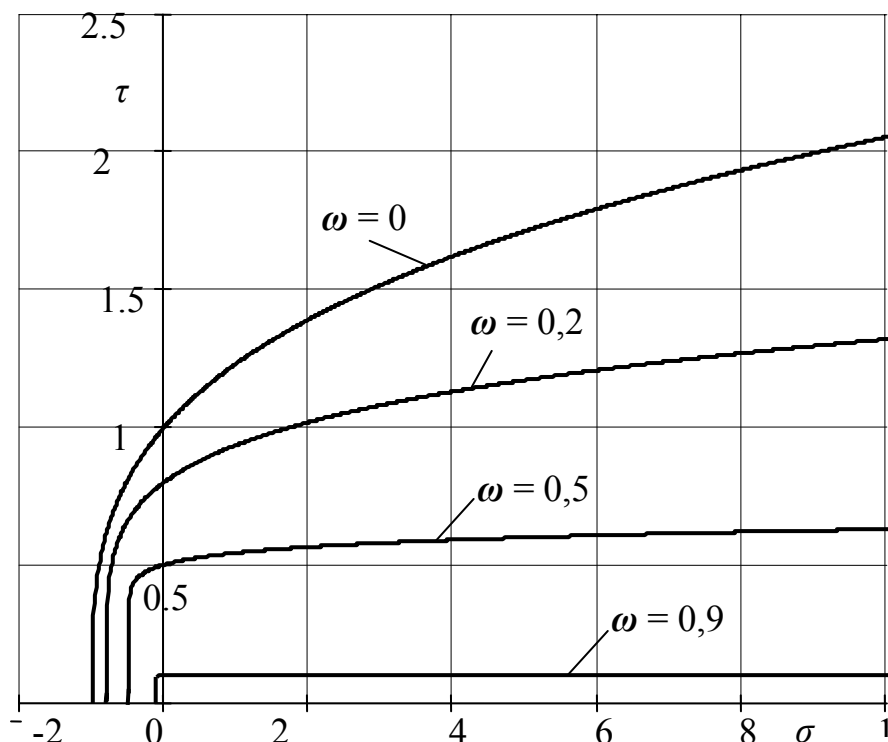


Рисунок 2.5 –Паспорта прочности горной породы по мере увеличения числа открытых трещин и увеличения поврежденности от 0 до 0,9

а) когезии сдвига и разрыва материала с трещинами уменьшаются пропорционально снижению сплошности, что приводит к значительному приближению паспорта прочности к осям координат диаграммы Мора;

б) увеличение числа трещин отрыва резко уменьшает эффективный параметр хрупкости нарушенного материала  $\alpha(1-\omega_0)$  вместо  $\alpha$ ; паспорт прочности заметно уменьшает угол наклона и материал ведет себя все более близко к идеально пластичному телу;

в) паспорт прочности вблизи оси касательных напряжений претерпевает все больший излом и в пределе при большой трещиноватости стремится принять форму прямоугольника. Эта закономерность изменения паспорта прочности связана с поведением уравнения прочности, которое изменяет свою форму по мере уменьшения параметра хрупкости.

г) чем меньше соотношение когезии разрыва к когезии сдвига, тем более круто изменяется паспорт прочности горной породы вблизи начала координат диаграммы Мора. С другой стороны, чем больше в материале содержится трещин отрыва, тем более резко изменяется его паспорт прочности в окрестности оси касательных напряжений.

### **2.2.1.2 Прочность массива с закрытыми трещинами**

Интересно проследить за изменением паспорта прочности горной породы, которая содержит только трещины с сомкнутыми берегами (так называемые «закрытые» трещины). Для этого в дифференциальном уравнении прочности следует положить, что на участках закрытых трещин нормальное к площадке сдвига напряжение  $\sigma_n$  остается неизменным, т.е. таким же, как и в обычном материале, однако на площадках закрытых трещин когезия сдвига и разрыва оказываются уменьшенными пропорционально поврежденности материала. Тогда дифференциальное уравнение прочности горной породы с закрытыми трещинами следует записать в виде:

$$\frac{\partial \tau_{nt}}{\partial \sigma_n} = \alpha \tau_{nt} \left[ \frac{1 - \omega_s}{\sigma_0 + \sigma_n} + \frac{\omega_s}{\sigma_0 (1 - \omega_s) + \sigma_n} \right]. \quad (2.19)$$

Решением этого дифференциального уравнения прочности для материала с закрытыми трещинами с учетом граничного условия при  $\sigma_n = 0$   $\tau_{nt} = \psi \tau_0 = (1 - \omega_s) \tau_0$  будет:

$$\tau_{nt} = (1 - \omega_s) \tau_0 \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^{\alpha(1-\omega_s)} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0(1-\omega_s)} + 1 \right)^{\alpha\omega_s} \quad (2.20)$$

Исследуем закономерности изменения паспорта прочности горной породы при росте числа закрытых трещин. Для этого обратимся к графикам на рис. 2.6 и сравним паспорта прочности на диаграмме Мора.

Как можно судить по рис. 2.6, закрытые трещины менее радикально изменяют наклон паспорта прочности горной породы, поэтому в целом прочность такого трещиноватого тела сохраняется в большей мере по сравнению с прочностью породы с таким же числом открытых трещин.

Это хорошо согласуется и с физическим смыслом рассматриваемой задачи.

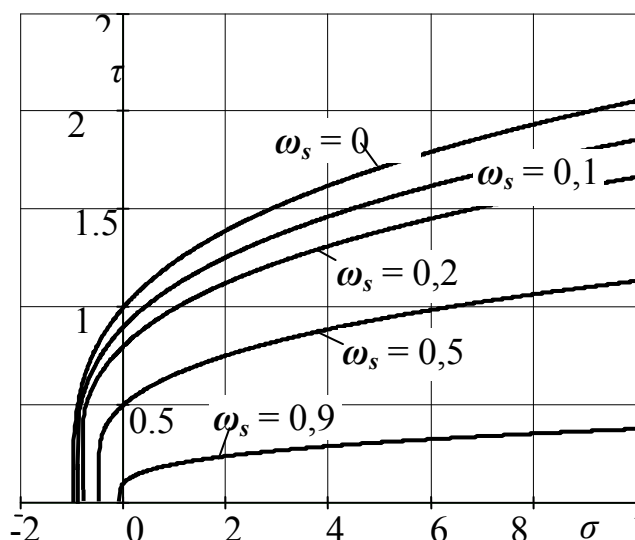


Рис. 2.6 – Паспорта прочности горной породы при увеличении закрытых трещин и поврежденности  $\omega_s$  от 0 до 0,9

### 2.2.1.3 Прочность массива с произвольными трещинами

Таким же образом, как и ранее, составим дифференциальное уравнение прочности для горной породы более сложной структуры, когда в ней содержатся трещины с открытыми и закрытыми берегами. В связи с этим в материале следует различать три области, а именно:

а) область материала с исходными прочностными свойствами, т.е. без трещин;

б) область с открытыми трещинами;

в) область с закрытыми трещинами. Условия прочности в каждой из этих областей были нами сформулированы ранее для каждого частного случая, что в результате дает следующее дифференциальное уравнение прочности:

$$\frac{\partial \tau_{nt}}{\partial \sigma_n} = \alpha \tau_{nt} \left[ \frac{\psi}{\sigma_0 + \sigma_n / \psi_0} + \frac{\omega_s}{\sigma_0 \psi + \sigma_n / \psi_0} \right], \quad (2.21)$$

где для краткости записи введены обозначения для сплошностей через поврежденности  $\psi_0 = 1 - \omega_0$ ;  $\psi_s = 1 - \omega_s$ ;  $\psi = 1 - \omega_0 - \omega_s$

Решением дифференциального уравнения прочности с граничными условиями при  $\sigma_n=0$   $\tau_{nt} = \psi \tau_0 = (1 - \omega_0 - \omega_s) \tau_0$  будет:

$$\tau_{nt} = \psi \tau_0 \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0 \psi_0} + 1 \right)^{\alpha \psi \psi_0} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0 \psi \psi_0} + 1 \right)^{\alpha \omega_s \psi_0}. \quad (2.22)$$

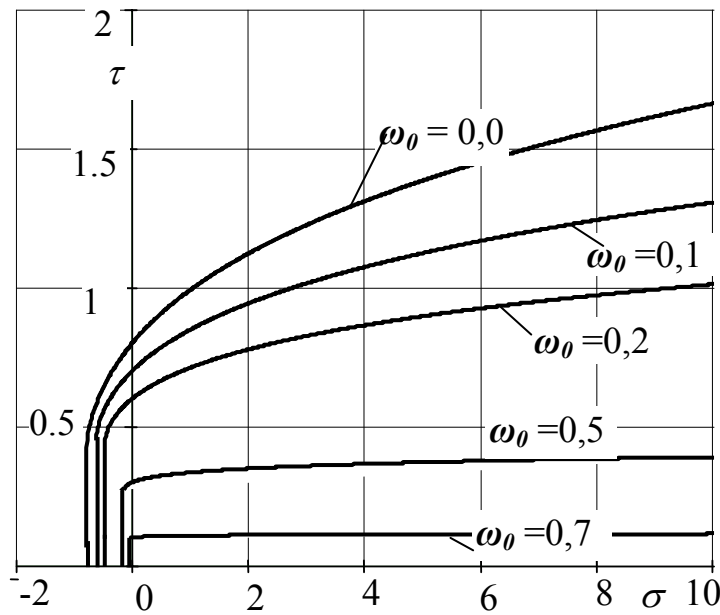


Рис. 2.7—Паспорта прочности горной породы при увеличении числа открытых трещин и постоянном числе закрытых трещин, равном  $\omega_s=0,2$

С помощью этого уравнения можно определять и полностью описывать прочностные свойства материала (горной породы) с любым сочетанием открытых и закрытых трещин. В качестве примера построим паспорта прочности для горной породы, у которой на фоне заданного числа закрытых трещин  $\omega_s=0,2$  изменяется число открытых трещин  $\omega_0$ . (см. рис. 2.7)

Из графика видно, что наличие двух типов трещин нелинейно влияет на изменение паспортов прочности горной породы.

Полученные дифференциальные уравнения прочности позволяют значительно расширить класс задач о прочности горных массивов. В частности, нет принципиальных препятствий задавать любое число раз-

нообразных стохастически равномерно распределенных по объему трещин, которые различаются между собой контактными условиями на берегах. Из этого следует, что возможно решение таких, ранее казавшихся недоступных, задач теории прочности как:

- оценка изменения паспорта прочности массива при попадании в него различных флюидов (вода, газ и т.д.), которые заполняют те или иные участки трещин и могут произвести заметное изменение поведения массива при технологических воздействиях (задачи устойчивости бортов карьеров, суффозии, сдвигов грунта и пр.);

- определение прочностных свойств массива горных пород при его осушении или увлажнении, что особенно важно при сезонных колебаниях влажности, приводящих к нарушению устойчивости бортов карьеров, откосов и насыпей;

- решение большого класса задач, связанных с управлением прочностью массивов горных пород путем тампонажа закрепляющего раствора в трещины и пустоты (упрочнение горных пород), что все более часто применяется в горной технологии, особенно на больших глубинах и др.

Таким образом, базовые положения аналитической теории прочности были получены на основе рассмотрения физической картины образования трещин сдвига при нагружении материала. При этом оказалось, что проскальзывание берегов трещин в процессе сдвигового деформирования происходит на качественно ином уровне, когда проявляется не только сухое трение, но и трение скольжения. Учет этого неожиданного феномена привел к необходимости использования не совсем обычной формы записи для определения коэффициента внутреннего трения при разрушении, а именно – в виде дифференциального уравнения, решение которого не представляет трудностей. Следовательно, не совсем обычная, - дифференциальная, - запись уравнения для коэффициента угла внутреннего трения предельной огибающей наибольших кругов диаграммы О. Мора позволило выйти на перспективное научное направление в создании теории прочности материалов, - в первую очередь – для горных пород и массивов, которые отличаются существенно нелинейным поведением в области многоосного (объемного) нагружения.

## 2.3 ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД И МАССИВОВ

### 2.3.1 Прямые задачи построения паспорта прочности

#### 2.3.1.1 Построение паспорта прочности по данным - $\sigma_p$ ; $\sigma_c$ ; $\varphi_c$

Пусть проводятся лабораторные испытания пород, в соответствии с которыми получены экспериментальные данные прочности:

$\sigma_p$  - прочность на растяжение;

$\sigma_c$  - прочность на сжатие;

$\varphi_c$  - угол внутреннего трения породы при одноосном сжатии.

Вычисление искомых параметров паспорта прочности будем производить с помощью блока Given программы MathCAD. Далее обозначения приводятся в соответствии с синтаксисом языка программы MathCAD.

С целью получения системы уравнений, необходимых для вычисления паспорта прочности, или, что то же самое, его параметров (когезии отрыва  $\sigma_0$  и сдвига  $\tau_0$ , а также параметр хрупкости  $\alpha$ ) с использованием решающего блока Given, произведем некоторые преобразования.

В уравнение прочности

$$\tau_{nt} = \tau_0 \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^\alpha, \quad (2.5)$$

подставим значения касательного  $\tau_{nt}$  и нормального  $\sigma_n$  напряжений, соответствующих прочности на одноосное сжатие  $\sigma_c$ , тогда в обозначениях MathCAD'a

$$\begin{aligned} \sigma_n &:= 0.5 \cdot \sigma_c \cdot (1 - \sin(\varphi_c)), \\ \tau(\sigma_c) &:= 0.5 \cdot \cos(\varphi_c) \cdot \sigma_c, \end{aligned} \quad (2.6)$$

после чего обозначим искомые параметры  $x = \tau_0$ ,  $y = \sigma_0$ ,  $z = \alpha$  и получим

$$x \cdot \left[ \frac{0.5 \cdot \sigma_c \cdot (1 - \sin(\varphi_c))}{y} + 1 \right]^z = 0.5 \cdot \cos(\varphi_c) \cdot \sigma_c. \quad (2.7)$$

Это и будет первым уравнением блока Given. Второе уравнение получим, написав значение коэффициента внутреннего трения, которое известно из эксперимента, для одноосного сжатия:

$$f = \operatorname{tg}(\varphi_c) = \frac{\partial}{\partial \sigma_n} \left[ \tau_0 \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^\alpha \right] = \frac{\alpha \tau_0}{\sigma_0} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^{\alpha-1}, \quad (2.8)$$

или, в обозначениях программы MathCAD с учетом ранее принятых обозначений:

$$\frac{x}{y} \cdot z \cdot \left[ \frac{0.5 \cdot \sigma_c \cdot (1 - \sin(\phi_c))}{y} + 1 \right]^{z-1} = \tan(\phi_c) \quad (2.9)$$

Последнее третье уравнение, необходимое для вычисления трех искомых параметров паспорта прочности, найдем из экспериментально установленного факта, что для большинства горных пород параметр хрупкости меньше  $\alpha < 0,5$ . А это значит, что паспорт прочности, как показали исследования поведения парабол с произвольным дробным показателем степени, меньшим 0,5, пересекает ось нормальных напряжений под прямым углом. С физической точки зрения это неравенство позволяет установить, что во всех случаях, когда  $\alpha < 0,5$ , прочность на одноосное растяжение совпадает с когезией разрыва.

Поэтому третье уравнение записывается элементарно просто:  $\sigma_p = \sigma_0$ . В обозначениях программы MathCAD с учетом обозначений для блока Given это равенство выглядит так:  $y = \sigma_p$ . По сути, для этого случая одна из переменных уже определена.

Как видим, определение параметров прочности с помощью разработанного алгоритма производится по стандартной процедуре. Используя исходные экспериментальные данные:

$$\sigma_c := 50 \quad \sigma_p := 4 \quad \phi_c := \frac{\pi}{180} \cdot 20 \quad \phi_c = 0.349$$

получим следующее решение

$$\begin{pmatrix} \tau_0 \\ \sigma_0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.009 \\ 4 \\ 0.317 \end{pmatrix}$$

Если записать уравнение круга Мора для паспорта прочности в виде функции

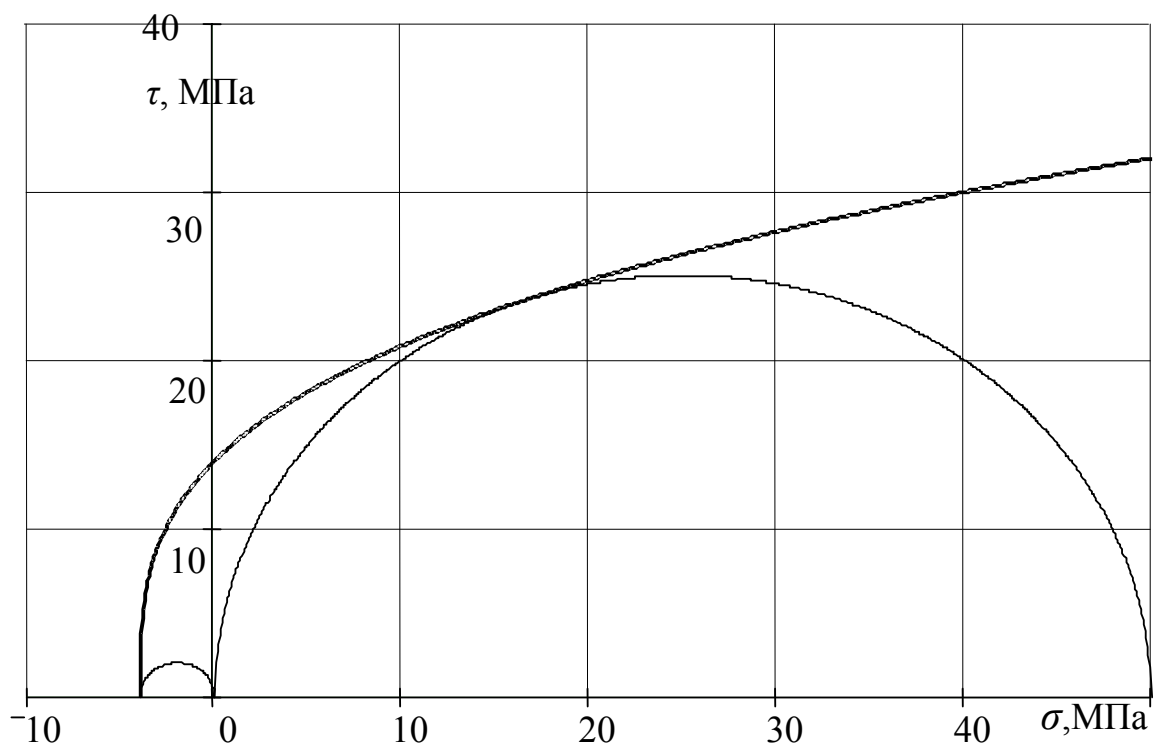


Рис. 2.8 - Паспорт прочности, соответствующий параметрам рис. 2.1, и предельные круги О. Мора для одноосных сжатия и растяжения

$$\text{Mor}(x, \sigma_1, \sigma_3) := \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4} - \left[ x - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} \right]^2}, \quad (2.10)$$

то можно сразу же построить не только паспорт прочности, соответствующий вычисленным параметрам, но и предельные круги диаграммы О. Мора, что и сделано на рис. 2.8.

Здесь же уместно оценить, как влияют на параметры паспорта прочности неточности определения экспериментальных данных. В особенности это касается угла внутреннего трения для точки одноосного сжатия, которая часто принимается априори по данным распознавания литологической принадлежности пород. Для этого построим графики зависимостей двух остальных параметров прочности, - когезии сдвига  $\tau_0$  и коэффициента хрупкости  $\alpha$  в зависимости от коэффициента внутреннего трения. Результаты расчетов приведены на рис. 2.9.

Из графика видно, что изменение исходных данных по коэффициенту внутреннего трения на 10 % не слишком сильно отклоняет параметры паспорта прочности.



### 2.3.1.2 Построение паспорта прочности по данным $\sigma_p$ ; $\sigma_c$ и кругу Мора

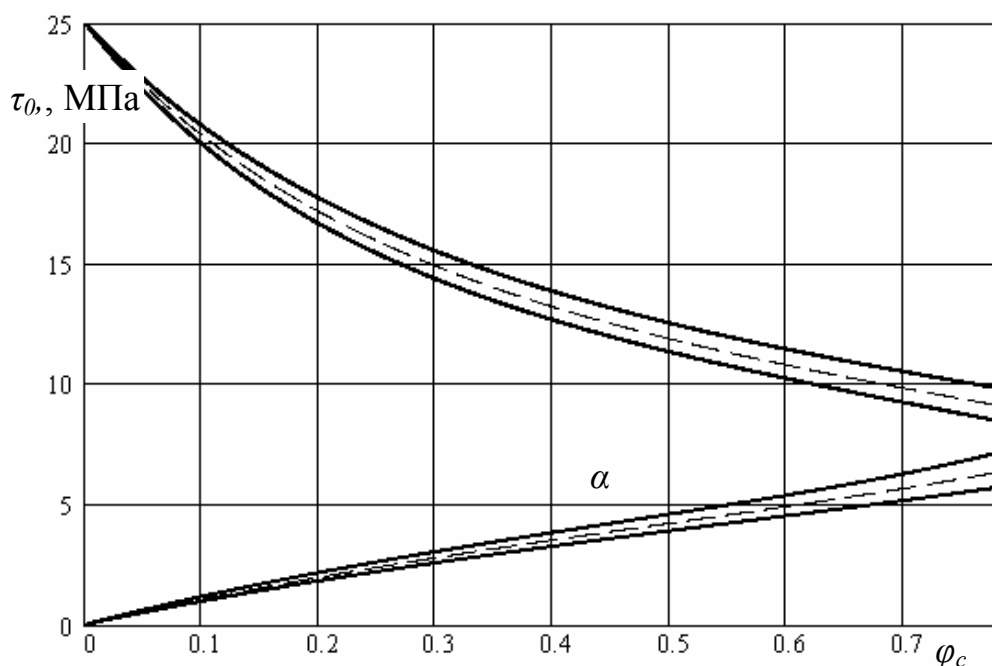


Рис. 2.9 - Графики зависимостей когезии  $\tau_0$  и параметра хрупкости  $\alpha$  от угла трения  $\varphi$  при его изменении на  $\pm 10\%$

Пусть проводятся лабораторные испытания пород, в соответствии с которыми получены экспериментальные данные прочности:

$\sigma_p$  - прочность на растяжение;

$\sigma_c$  - прочность на сжатие;

$(\sigma_1, \sigma_3)$  круг Мора при объемном сжатии.

Как и ранее, вычисление искомых параметров паспорта прочности будем производить с помощью блока Given программы MathCAD. Далее обозначения приводятся в соответствии с синтаксисом языка программы MathCAD.

Для получения системы уравнений, необходимых для вычисления параметров паспорта прочности, произведем некоторые преобразования. Исходные данные в общем виде выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
 \sigma_{11} := \sigma_c & \sigma_{31} := 0 & \text{- прочность на одноосное сжатие} \\
 \sigma_{12} := \sigma_{-1}(32) & \sigma_{32} := \sigma_{-3}(32.) & \text{- прочность на объемное сжатие} \\
 \sigma_{13} := 0 & \sigma_{33} := -\sigma_p & \text{- прочность на одноосное растяжение}
 \end{array}$$

Так же, как и ранее, последнее условие, необходимое для вычисления трех искомых параметров паспорта прочности найдем из экспериментально установленного факта, что для большинства горных пород параметр хрупкости меньше  $\alpha < 0,5$ . Поэтому паспорт прочности пересекает ось нормальных напряжений под прямым углом, а прочность на одноосное сжатие совпадает с когезией разрыва и третье уравнение записывается так:  $\sigma_p = \sigma_0$ .

Следовательно, принимаем, что известна одна из переменных  $\sigma_p = \sigma_0$ , и неизвестными остаются два параметра: когезия сдвига  $\tau_0$  и параметр хрупкости  $\alpha$ , которые обозначим  $x$  и  $z$ . Кроме того, неизвестными являются и два значения  $\sigma_n$ , которые обозначим  $s_1$  и  $s_2$ . Итак, всего неизвестных 4, для чего необходимо составить 4 уравнения для блока Given.

Подставляя в уравнения (2.3) значения известных главных напряжений и выражая все остальные через искомые неизвестные, получим следующие уравнения (приведено только первое уравнение для индекса 1, такие же для индексов 2,3,4):

$$s_1 + x \cdot \left( \frac{s_1}{\sigma_p} + 1 \right)^z \cdot \left[ z \cdot \frac{x}{\sigma_p} \cdot \left( \frac{s_1}{\sigma_p} + 1 \right)^{z-1} + \sqrt{1 + \left[ z \cdot \frac{x}{\sigma_p} \cdot \left( \frac{s_1}{\sigma_p} + 1 \right)^{z-1} \right]^2} \right] = \sigma_1 \quad (2.11)$$

В этих уравнениях неизвестные  $\tau_{nt}$ ,  $f$  выражены через неизвестные  $x$ ,  $z$ ,  $s_1$  и  $s_2$  с помощью уравнений (2.3). Задаваясь начальными значениями переменных

$$x := 10 \quad z := 0.0 \quad s_1 := 10 \quad s_2 := 15$$

получим в результате следующий вид решающего блока Given (рис. 2.10). Исходные данные были подобраны так, чтобы решение воспроизводило ранее полученное решение по другим исходным параметрам п.2.3.1.1.

На рис. 2.11 показана диаграмма Мора с исходными данными в виде прочности на одноосное сжатие и растяжение и предельным кругом объемного сжатия.

---

$x := 10 \quad z := 0.0 \quad s_1 := 10 \quad s_2 := 15$

Начальные значения переменных

Given

$$s_1 + x \cdot \left( \frac{s_1}{\sigma_p} + 1 \right)^z \cdot \left[ z \cdot \frac{x}{\sigma_p} \cdot \left( \frac{s_1}{\sigma_p} + 1 \right)^{z-1} + \sqrt{1 + \left[ z \cdot \frac{x}{\sigma_p} \cdot \left( \frac{s_1}{\sigma_p} + 1 \right)^{z-1} \right]^2} \right] = \sigma_{11}$$

$$s_2 + x \cdot \left( \frac{s_2}{\sigma_p} + 1 \right)^z \cdot \left[ z \cdot \frac{x}{\sigma_p} \cdot \left( \frac{s_2}{\sigma_p} + 1 \right)^{z-1} + \sqrt{1 + \left[ z \cdot \frac{x}{\sigma_p} \cdot \left( \frac{s_2}{\sigma_p} + 1 \right)^{z-1} \right]^2} \right] = \sigma_{12}$$

$$s_1 + x \cdot \left( \frac{s_1}{\sigma_p} + 1 \right)^z \cdot \left[ z \cdot \frac{x}{\sigma_p} \cdot \left( \frac{s_1}{\sigma_p} + 1 \right)^{z-1} - \sqrt{1 + \left[ z \cdot \frac{x}{\sigma_p} \cdot \left( \frac{s_1}{\sigma_p} + 1 \right)^{z-1} \right]^2} \right] = \sigma_{31}$$

$$s_2 + x \cdot \left( \frac{s_2}{\sigma_p} + 1 \right)^z \cdot \left[ z \cdot \frac{x}{\sigma_p} \cdot \left( \frac{s_2}{\sigma_p} + 1 \right)^{z-1} - \sqrt{1 + \left[ z \cdot \frac{x}{\sigma_p} \cdot \left( \frac{s_2}{\sigma_p} + 1 \right)^{z-1} \right]^2} \right] = \sigma_{32}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_0 \\ \alpha \\ \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \end{pmatrix} := \text{Find}(x, z, s_1, s_2) \quad \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \alpha \\ \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.009 \\ 0.317 \\ 16.45 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.10 – Программа определения параметров паспорта прочности с помощью блока Given

### 2.3.1.3 Построение паспорта прочности по испытаниям пород в стабилometре

Наиболее общим случаем определения параметров паспорта прочности является испытания пород в стабилometре, когда известны как минимум три предельных круга диаграммы Мора.

Исходные данные для расчетов после проведения трех (или более) испытаний на объемное сжатие, растяжение, или любое их сочетание, в самом общем виде будут выглядеть в виде матрицы, по крайней мере, не менее чем из трех значений максимального нормального напряжения и второй матрицы из такого же числа значений для минимального нормального напряжения:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 54.06 \\ 65.594 \\ 77.093 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 2.067 \\ 8.601 \\ 15.822 \end{pmatrix}$$

Неизвестными являются все три параметра паспорта прочности - когезии отрыва  $\sigma_0$  и сдвига  $\tau_0$ , а также параметр хрупкости  $\alpha$ . Следовательно, необходимо определить три параметра:  $\tau_0$ ,  $\sigma_0$  и  $\alpha$  которые обозначим  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Кроме того, неизвестными являются и 3 значения  $\sigma_n$ , которые обозначим  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$ .

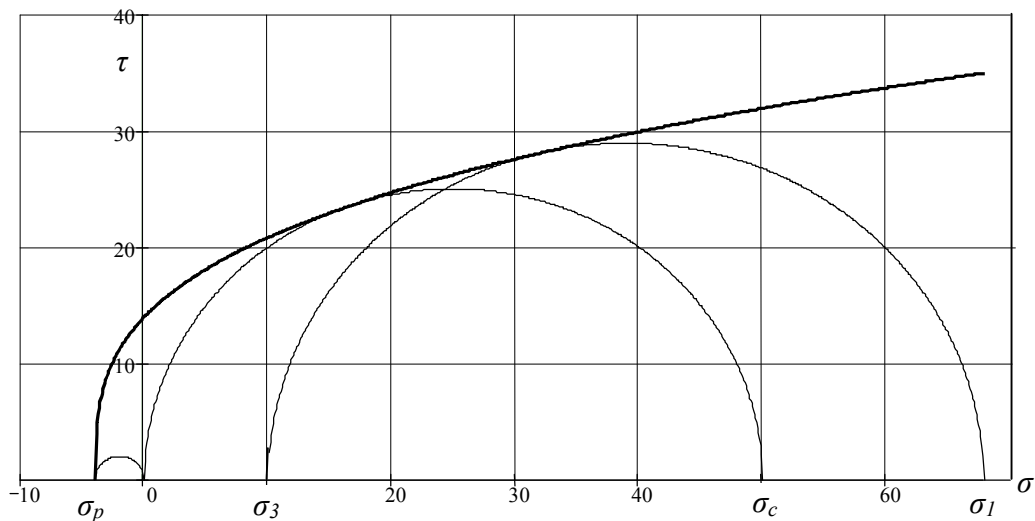


Рис. 2.11 – Паспорт прочности с заданными предельными кругами напряжений

Используя те же преобразования, что и ранее, получим в блоке Given 6 уравнений с 6-ю неизвестными. Удобство данного подхода состоит в том, что он является общим случаем и использует единообразные разрешающие уравнения.

На рис. 2.12 представлена графическая интерпретация полученного решения в виде диаграммы Мора. С целью наглядности исходные данные подобраны так, чтобы решение совпало с ранее рассмотренными случаями задания исходных данных. Решение этих уравнений в блоке Given можно отследить по рис. 2.13. На этом же рисунке видно формат выходных данных из решающего блока.

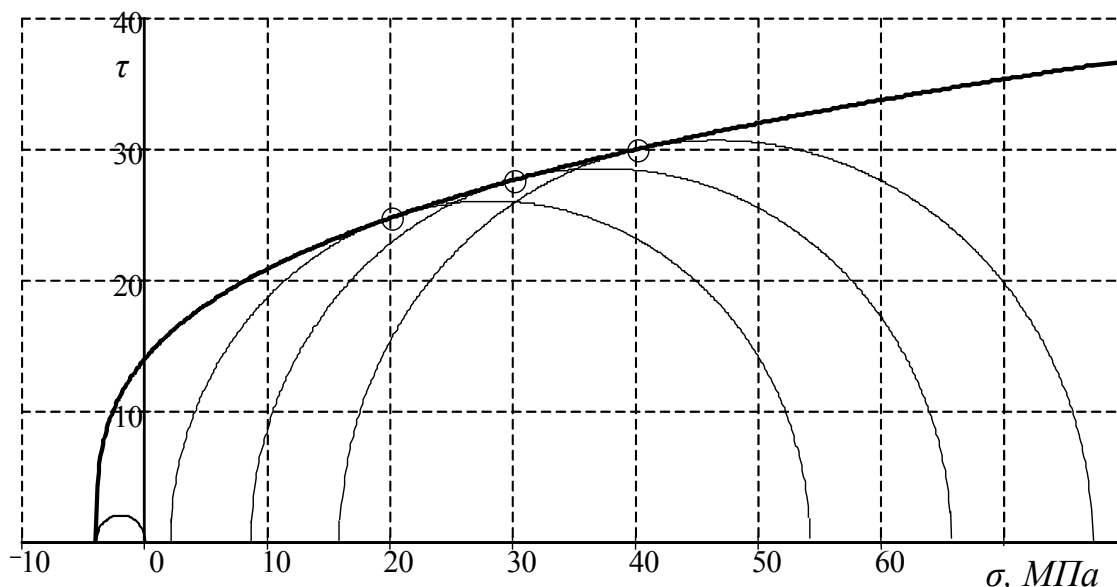


Рис. 2.12 – Паспорт прочности Мора для общего случая задания данных испытаний пород в стабилометре

#### 2.3.1.4 Построение паспорта прочности при большом массиве данных

Дополнительно необходимо продемонстрировать программы определения параметров паспорта прочности, если экспериментальных данных будет больше, чем требуемое минимальное количество – в виде массива произвольного размера. .

Для определения параметров паспорта прочности применим метод наименьших квадратов Гаусса. В качестве примера такого массива данных возьмем достаточно представительные результаты испытаний известняка, приведенные в работе М. Alber and J. Heiland [32]. Численные данные по объемным прочностным испытаниям известняка в стабилометре записываются в виде матриц  $(\sigma_1, \sigma_3)$ , число данных в которых равно числу проведенных экспериментов. Всего объемных испытаний известняка было проведено 52.

# Начальные значения переменных

x := 10   x := 1   z := 0.0   s<sub>1</sub> := 10   s<sub>2</sub> := 15   s<sub>3</sub> := 20

Given

$$s_1 + x \cdot \left( \frac{s_1}{y} + 1 \right)^z \cdot \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_1}{y} + 1 \right)^{z-1} + \sqrt{1 + \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_1}{y} + 1 \right)^{z-1} \right]^2} \right] = \sigma_{11}$$

$$s_2 + x \cdot \left( \frac{s_2}{y} + 1 \right)^z \cdot \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_2}{y} + 1 \right)^{z-1} + \sqrt{1 + \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_2}{y} + 1 \right)^{z-1} \right]^2} \right] = \sigma_{12}$$

$$s_3 + x \cdot \left( \frac{s_3}{y} + 1 \right)^z \cdot \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_3}{y} + 1 \right)^{z-1} + \sqrt{1 + \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_3}{y} + 1 \right)^{z-1} \right]^2} \right] = \sigma_{13}$$

$$s_1 + x \cdot \left( \frac{s_1}{y} + 1 \right)^z \cdot \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_1}{y} + 1 \right)^{z-1} - \sqrt{1 + \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_1}{y} + 1 \right)^{z-1} \right]^2} \right] = \sigma_{31}$$

$$s_2 + x \cdot \left( \frac{s_2}{y} + 1 \right)^z \cdot \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_2}{y} + 1 \right)^{z-1} - \sqrt{1 + \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_2}{y} + 1 \right)^{z-1} \right]^2} \right] = \sigma_{32}$$

$$s_3 + x \cdot \left( \frac{s_3}{y} + 1 \right)^z \cdot \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_3}{y} + 1 \right)^{z-1} - \sqrt{1 + \left[ z \cdot \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{s_3}{y} + 1 \right)^{z-1} \right]^2} \right] = \sigma_{33}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_0 \\ \sigma_0 \\ \alpha \\ \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \\ \sigma_{n3} \end{pmatrix} := \text{Find}(x, y, z, s_1, s_2, s_3) \qquad \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \sigma_0 \\ \alpha \\ \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \\ \sigma_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.009 \\ 4 \\ 0.317 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

i :=

Рис. 2.13 – Программа определения паспорта прочности по испытаниям в стабилометре с помощью блока Given

На рис. 2.14 приведены результаты испытаний в стабилометре известняка, а также полученные осредненные данные по одинаковому

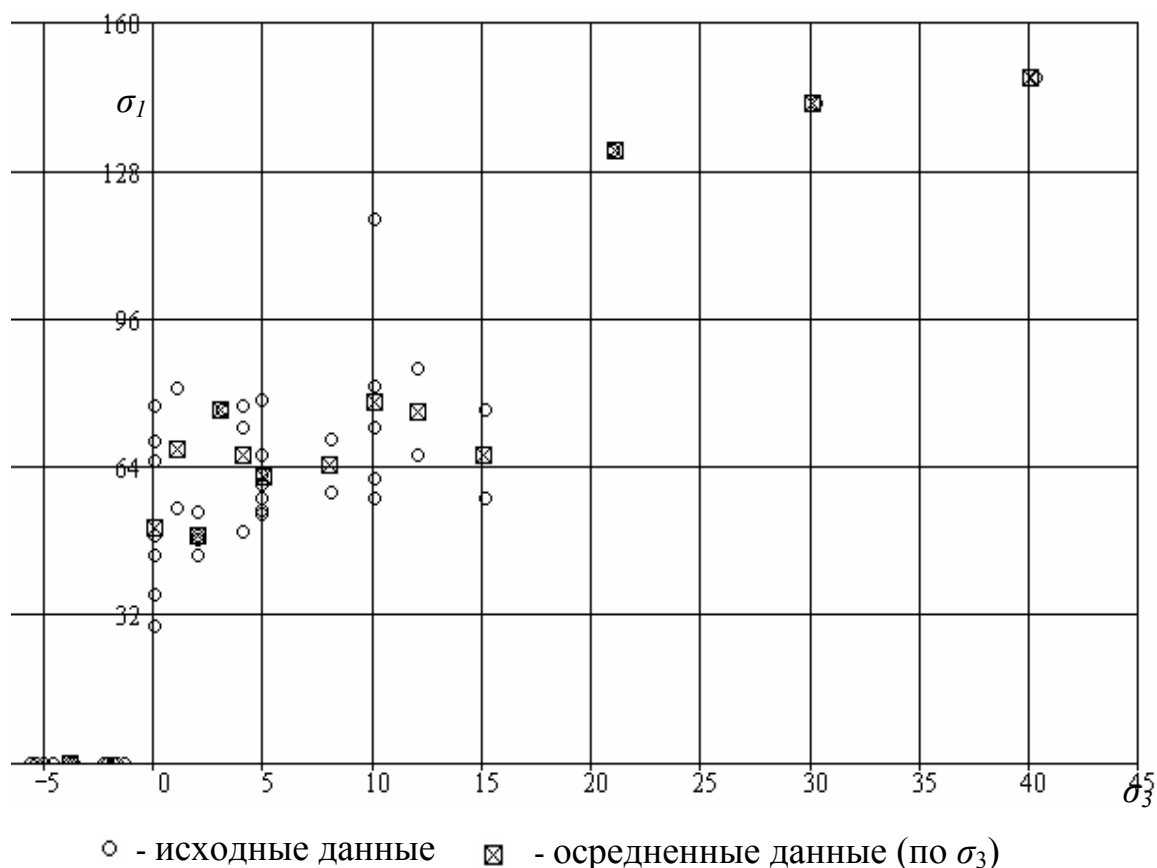


Рис.2.14 – Результаты испытаний известняка [32], представленные на диаграмме Мора и данные по их осреднению

значению минимального напряжения. Предварительная обработка данных производилась путем их осреднения (отыскания среднего значения) по каждому из фиксированных минимальных значений нормального напряжения при определении объемной прочности. После осреднения получено 14 кругов диаграммы Мора, которые сведены в матрицы. Первое значение в матрице – это осредненная прочность на одноосное растяжение, второе значение – полученная по результатам испытаний прочность на одноосное сжатие, причем разброс получился достаточно значительный.

Результаты экспериментальных данных в виде кругов напряжений Мора и вычисленные кривые паспорта прочности представлены на рис. 2.15.

Как следует из рис. 2.15, паспорт прочности весьма чувствителен к наличию исходных данных по испытаниям пород на растяжение. Для этого достаточно сравнить параметра паспорта при полных данных и при отсутствии данных о растяжении:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{01} \\ \alpha_1 \\ \tau_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.9 \\ 0.578 \\ 9.228 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{02} \\ \alpha_2 \\ \tau_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46.8 \\ 1.179 \\ 17.435 \end{pmatrix}$$

Без данных о растяжении материала параметры прочности оказались в недопустимых пределах. Так, параметр хрупкости  $\alpha$  оказался больше единицы, что физически бессмысленно, а когезия сдвига оказалась меньше когезии отрыва, что также является неверным. И хотя в области сжатия кривые паспортов прочности отличаются друг от друга не столь значительно, однако при приближении к началу координат разница между ними становится весьма существенной.

Отличия в конечных данных настолько разительны, что заставляют сделать единственно правильный вывод о нецелесообразности проведения испытаний материалов без обязательного для всех случаев прямых испытаний на растяжение (одноосное или объемное).

Таким образом, созданы программы для решения прямой задачи теории прочности по определению параметров паспорта прочности материалов по экспериментальным данным. Рассмотренными случаями, по сути, исчерпываются все прямые задачи по обработке экспериментальных данных и получения параметров паспорта прочности материалов (горных пород).

### 2.3.2 Непрямые задачи прочности горных пород

К числу «непрямых» следует отнести те задачи, когда по известным прочностным параметрам паспорта прочности материала следует найти все остальные прочностные показатели материала, если задана одна из величин, идентифицирующая некоторую точку на паспорте прочности. Конкретизируя, можно перечислить следующие возможные случаи:

а) через нормальное (или касательное) напряжение на площадке разрушения определить в произвольно заданной точке паспорта прочности соответствующие ей максимальное и минимальное напряжения, а также коэффициент (угол) внутреннего трения;



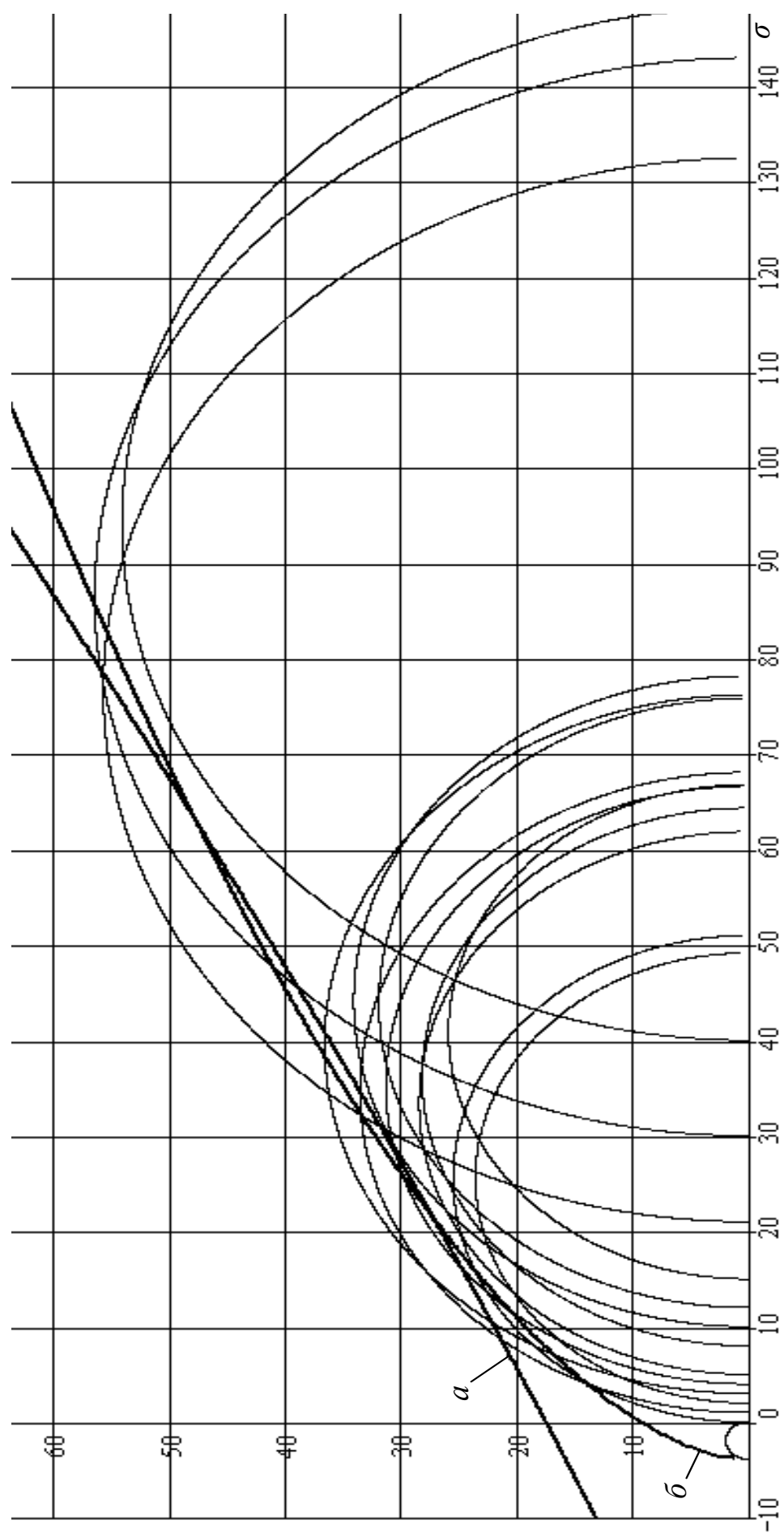


Рис.2.15 – Паспорт прочност известняка с учетом( $a$ )  
и без учета ( $b$ ) прочности на растяжение

б) при заданном значении минимального напряжения  $\sigma_3$  и известных параметрах паспорта прочности (когезии отрыва  $\sigma_0$  и сдвига  $\tau_0$ , а также коэффициента хрупкости  $\alpha$ ) определить максимальное напряжение  $\sigma_1$  и коэффициент (угол) внутреннего трения  $tg\rho = f$ ;

в) при заданном значении максимального напряжения  $\sigma_1$  и известных параметрах паспорта прочности (когезии отрыва  $\sigma_0$  и сдвига  $\tau_0$ , а также коэффициента хрупкости  $\alpha$ ) определить минимальное напряжение  $\sigma_3$  и коэффициент (угол) внутреннего трения  $tg\rho = f$ ;

г) при заданном коэффициенте (угле) внутреннего трения и известных параметрах паспорта прочности (когезии отрыва  $\sigma_0$  и сдвига  $\tau_0$ , а также коэффициента хрупкости  $\alpha$ ) определить максимальное  $\sigma_1$  и минимальное  $\sigma_3$  напряжения;

Несмотря на обилие возможных формулировок различных задач, удалось разработать такую программу, которая обеспечивает решение любой из поставленных задач.

Рассмотрим программу, когда по известным параметрам уравнения огибающей кругов Мора ( $\alpha$ ,  $\tau_0$ ,  $\sigma_0$ ) и по одной из 5 характеристик ( $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ ,  $f$ ) напряженного состояния в момент разрушения можно определить остальные 4. С этой целью воспользуемся решающим блоком Given. Как известно, при этом надо задавать начальные значения искомых параметров для решающего блока. Начальные значения параметров (guess value), необходимо задавать, учитывая их механический смысл:  $\sigma_1 > \sigma_n > \sigma_3$ ,  $0 < \alpha < 1$  и т.п.

Программа для решения одной из самых распространенных не-прямых задач представлена на рис. 2.16, когда по одному из пяти параметров из заданных показателей напряженного состояния горных пород ( $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ ,  $f$ ) определяются остальные четыре

В качестве демонстрации на рис. 2.16 приведено определение по заданному уравнению прочности и нормальному напряжению на площадке разрушения  $\sigma_n$  определяются остальные показатели, ( $\tau_{nt}$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ ,  $f$ ). На рис. 2.17 показана геометрическая интерпретация полученного решения.

Как правило, с помощью разработанной программы можно определять и параметры напряженного состояния, положив любые допустимые значения максимального и минимального напряжений. Однако в ряде случаев, когда минимальное главное напряжение  $\sigma_3 < 0$ , а пара

### Начальные значения параметров

$\tau := 1$   $\sigma_1 := 20$   $\sigma_3 := 1$   $f := 0.3$   $\sigma_n := 10$

Уравнения solve blocks

Given

$\sigma_n = 30$  Заданный параметр. Он может быть выбран из  $\tau$ ,  $\sigma_n$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ ,  $f$

$$\tau = \tau_0 \cdot \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^\alpha$$

Уравнение прочности

$$f = \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot \frac{\tau_0}{\sigma_0}$$

Угол внутреннего трения

$$\sigma_3 = \sigma_n + \tau \cdot (f - \sqrt{1 + f^2})$$

Главные напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma_n + \tau \cdot (f + \sqrt{1 + f^2})$$

Решение solve blocks

Ответ

$$\begin{pmatrix} \tau_ \\ \sigma_n_ \\ \sigma_1_ \\ \sigma_3_ \\ f_ \end{pmatrix} := \text{Find}(\tau, \sigma_n, \sigma_1, \sigma_3, f)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_ \\ \sigma_n_ \\ \sigma_1_ \\ \sigma_3_ \\ f_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26.604 \\ 30 \\ 63.573 \\ 8.918 \\ 0.235 \end{pmatrix}$$

Рис.2.16 – Программа с решающим блоком Given для определения по заданному паспорту прочности остальных прочностных параметров

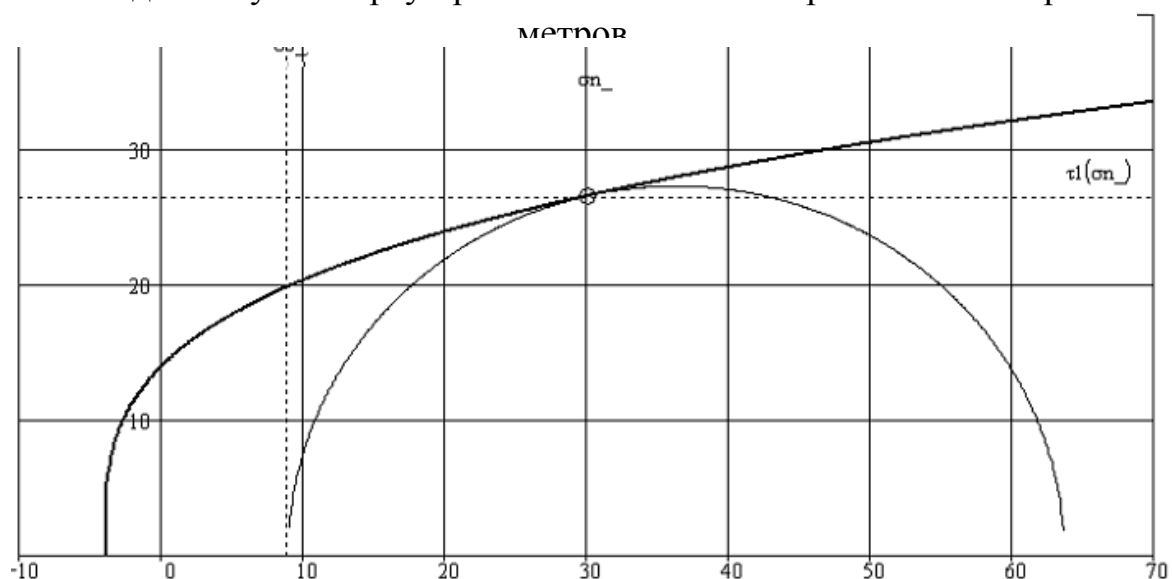


Рис.2.17 – Общий вид паспорта прочности по рис.2.16 и круг Мора для заданного нормального напряжения

метр хрупкости  $\alpha > 0,5$ , решение программным способом получить не удастся. Это связано с особенностями поведения уравнения паспорта прочности вблизи начала координат. При малых значениях показателя хрупкости  $\alpha$  на теоретической кривой паспорта прочности возникает участок повышенного изгиба, когда ни один из предельных кругов диаграммы Мора не может коснуться кривой паспорта прочности без того, чтобы не пересечь последний. Таким образом, ввиду значительной кривизны теоретической кривой паспорта прочности возникает фиктивная зона. Чтобы ее устранить, она должна быть заменена дугой окружности, построенной с внутренним касанием к паспорту прочности.

Таким образом, при малых значениях показателя хрупкости материала необходимо паспорт прочности строить с учетом возникновения фиктивной зоны (рис. 2.18). Если для графических построений это не представляет никаких затруднений, то при математическом описании, особенно с использованием вычислительных алгоритмов, фиктивная зона вносит существенные искажения в определяемые параметры паспорта прочности.

С физической точки зрения наличие фиктивной зоны на паспорте прочности свидетельствует о том, что:

а) такой материал невозможно разрушить сдвигающими напряжениями, в частности, чистым сдвигом, т. к. его разрушение будет происходить всегда за счет трещин растяжения, когда минимальное главное напряжение достигнет прочности на разрыв;

б) при испытаниях материалов на чистый сдвиг будет наблюдаться большой разброс результатов испытаний, чистый сдвиг достигнуть невозможно и, поэтому, такие испытания не должны проводиться;

в) результаты испытаний материала на растяжение будут давать одинаковые (идентичные) результаты при различных значениях максимального сжимающего нормального напряжения  $\sigma_1$  вплоть до момента, пока круг наибольших напряжений диаграммы Мора не выйдет за пределы фиктивной зоны.

Тем самым мы получили важный практический вывод, получив объяснение, почему и в чем физический смысл невозможности проводить испытания горных пород на чистый сдвиг. Становится понятным, почему у горных пород (особенно трещиноватых) испытания на сдвиг принципиально невозможны и дают неверные результаты, и почему такие породы разрушаются разрывом, а не сдвигом.

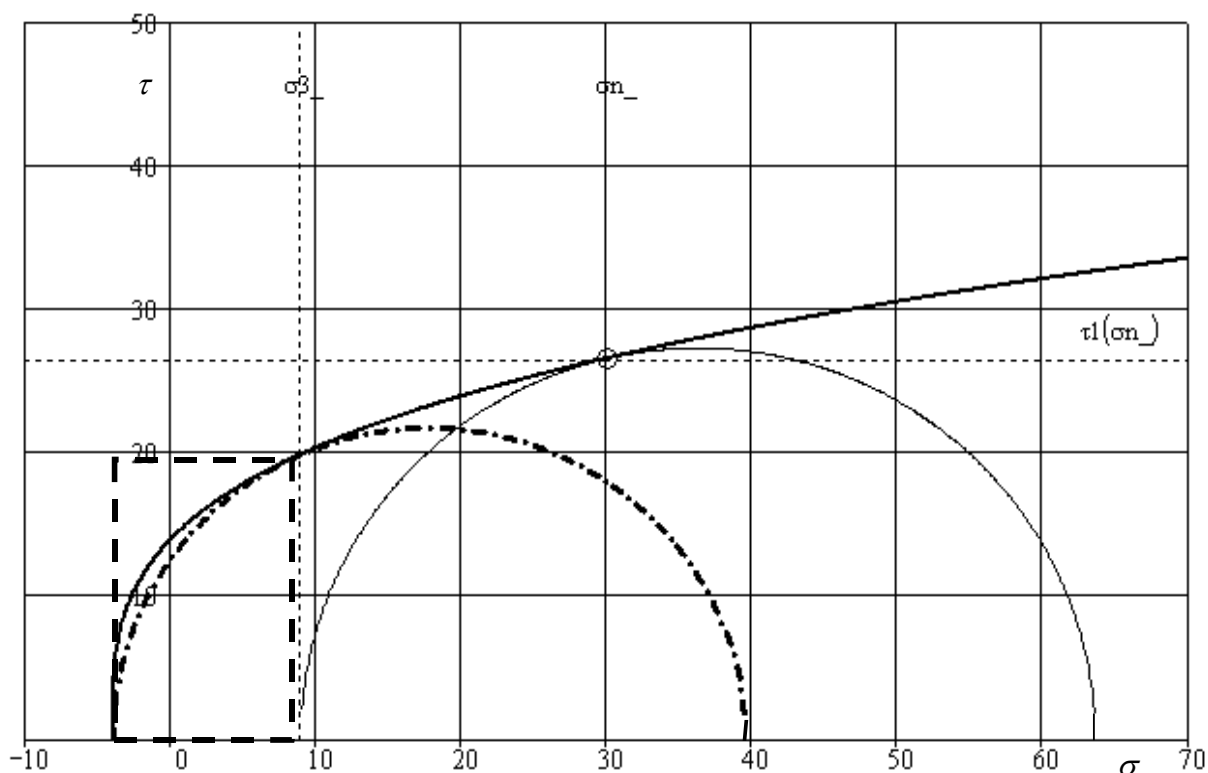


Рис.2.18 – Зона фиктивного участка паспорта прочности  
(штриховой прямоугольник)

Отсюда следует, что необходимо изъять из инструкций по испытанию материалов с низкими значениями показателей хрупкости и, в первую очередь, для горных пород, рекомендации по испытанию на сдвиг и кручение, так как такие испытания заведомо дают неверные результаты. Следует также произвести исправления в большинстве учебников и учебных пособий по механике горных пород и смежным учебным дисциплинам (например, основания и фундаменты, механика грунтов и др.), указав на ошибочность рекомендаций по испытанию горных пород и грунтов на сдвиг (методы продавливания, кручения, и пр.).

Правда, в некоторых, достаточно редких случаях, экспериментальное определение прочностных показателей горных пород методами сдвига все же удастся. К таким случаям следует отнести, прежде всего, пластичные породы и материалы типа мергелей, глин, грунтов и т.п. Этим в какой-то мере оправдываются многочисленные методики испытаний грунтов в приборах чистого среза, особенно при наличии многофазных сред (жидкость, наполненные газом трещины и поры). Однако к

трактовке результатов подобных испытаний следует относиться с крайней осторожностью и подвергать их тщательной проверке с помощью методик, которым не присущи столь принципиальные недостатки. К таким методикам следует отнести, прежде всего, испытания материалов в стабилометрах при нагружении по методам Кармана и Беккера.

## **2.4 ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОЧНОСТИ МАССИВОВ**

В данном разделе последовательно исследуются особенности влияния на прочность материала различных факторов с целью показать главные черты аналитической теории прочности и ее отличия от предшествующих ей теоретических описаний прочности.

### **2.4.1 Классификация пород по прочностным свойствам**

Вновь обратимся к исходному обобщенному уравнению прочности и приведем его к безразмерному виду, разделив левую и правую часть на когезию разрыва  $\sigma_0$ . Тогда получим заметное упрощение вида уравнения, поскольку его вид не зависит от когезии разрыва, при этом вместо когезии сдвига введем соотношение  $\kappa = \tau_0 / \sigma_0$ , которое назовем коэффициентом когезии (каппа):

$$\tau = \kappa(\sigma + 1)^\alpha, \quad (2.16)$$

где введены новые обозначения для относительных напряжений

$$\tau = \tau_{nt} / \sigma_0; \quad \sigma = \sigma_n / \sigma_0 \quad (2.17)$$

Общее представление об изменении приведенных паспортов прочности дает рис. 2.19, на котором для иллюстрации взята горная порода с исходными параметрами паспорта прочности  $\alpha=0,3$ ;  $\tau_0=2$  МПа;  $\sigma_0 = 1$  МПа.

В уравнении (2.16) в основу положена когезия разрыва  $\sigma_0$  (прочность на всестороннее растяжение). На приведенном паспорте прочности (рис. 2.20) все материалы будут различаться только по изменениям коэффициентов хрупкости  $0 \leq \alpha \leq 1$  и когезии  $0 \leq \kappa \leq 1$ .

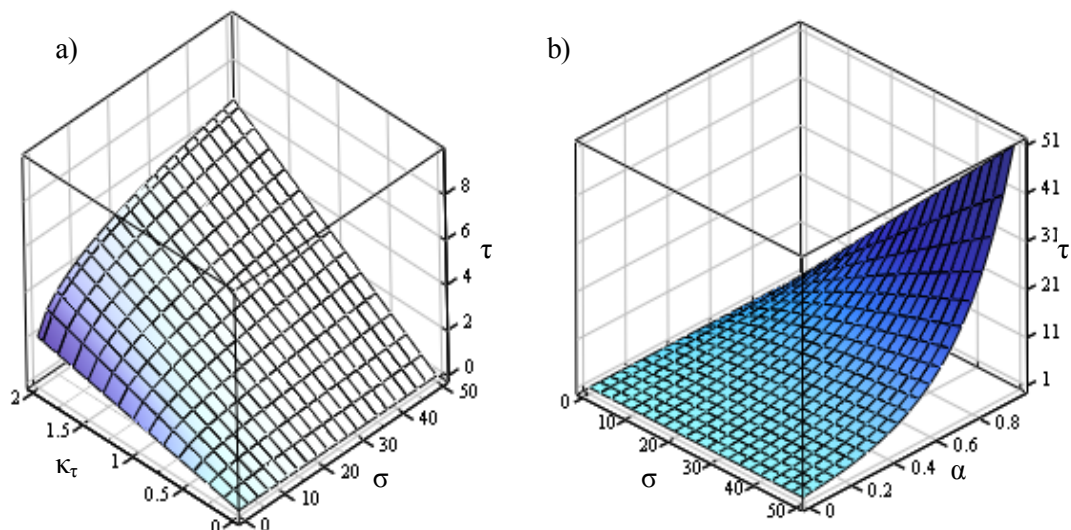


Рис. 2.19 – Графики зависимости приведенных паспортов прочности горных пород от коэффициентов а)когезии  $0 < \kappa < 2$  и б)хрупкости  $0 < \alpha < 1$

Последнее неравенство нуждается в более подробном обсуждении. В однородном ненарушенном материале, исходя из физических соображений, когезия сдвига не должна превышать когезии отрыва, т. е.  $0 \leq \kappa \leq 1$ , так же как продольная жесткость материала превосходит жесткость сдвиговую. Подтверждением теоретического значения неравенства  $0 \leq \kappa \leq 1$  служит и тот факт, что для идеально связного материала, у которого прямолинейный паспорт прочности и  $\alpha = 1$  (полная хрупкость) коэффициент когезии тождественно равен коэффициенту трения  $\kappa = f = \tau_0 / \sigma_0$ , который, как известно, не может превышать единицу.

Однако на практике при испытании пород мы повсеместно наблюдаем обратное соотношение  $1 \leq \kappa$ , что особенно характерно для горных пород и каменных материалов. Это объясняется ничем иным, как структурной дефектностью материала, когда в нем наблюдаются многочисленные микро-, мезо -, и макротрещины сдвигового (с закрытыми берегами) и отрывного вида. На рис. 2.20 такие материалы характеризуются самыми «крутыми» паспортами прочности. Поэтому есть смысл провести классификацию всех материалов по классификационным признакам  $\alpha \geq 0,5$ ;  $\kappa \geq 1$ .

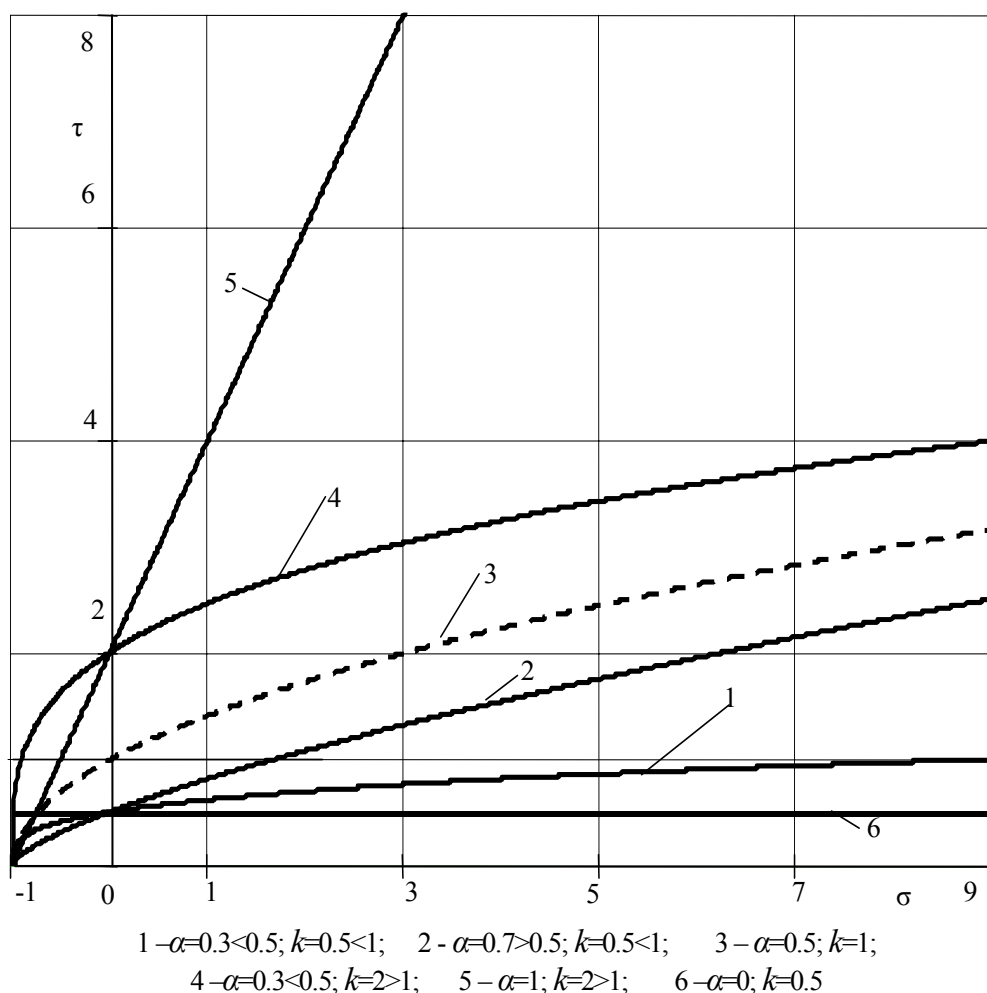


Рисунок 2.20 – Приведенные графики прочности в относительных координатах для различных пород

Такая классификация может указать техническим работникам на вполне доступном уровне понимания об особенностях поведения материалов при внешнем нагружении – как будут проходить деформации, показать склонность к внезапным разрушениям, наличие дефектов и трещин и т.д. Классификация пород по прочностным свойствам представлена в табл. 2.2.

Для пластичных пород, у которых когезия разрыва больше когезии сдвига и паспорт прочности весьма пологий (кривая 1 на рис. 2.20)



характерным поведением в выработке является низкая чувствительность к растягивающим напряжениям на контуре выработки, склонность к высоким сдвиговым деформациям. Поэтому в горных выработках более вероятно разрушение от сжимающих напряжений, когда будет формироваться зона неупругих деформаций больших размеров, а своды естественного равновесия наблюдаются значительно реже. Идеально пластичные породы представлены паспортом 6, он параллелен оси нормальных напряжений.

Таблица 2.2 Классификация горных пород по прочностным показателям

|                             | По коэффициенту хрупкости $0 \leq \alpha \leq 1$ |                        |                     |
|-----------------------------|--------------------------------------------------|------------------------|---------------------|
|                             |                                                  | $\alpha < 0,5$         | $\alpha > 0,5$      |
|                             |                                                  |                        |                     |
| По коэффициенту когезии $k$ | $k < 1$                                          | пластичность           | Умеренная хрупкость |
|                             | $k > 1$                                          | Умеренная пластичность | хрупкость           |

В хрупких породах (кривая 4 на рис. 2.20) более вероятны бегущие трещины разрыва и отслоения пород, часто формируются своды естественного равновесия, а зона неупругих деформаций встречается (в тех же условиях) реже и имеет малую глубину, смещения пород формируются в результате их расслоения.

Приведенный паспорт прочности 3 (см. рис. 2.20) занимает граничное положение, отделяя пластичные породы от хрупких. Это – обобщение всех паспортов прочности на приведенной диаграмме, которые описываются квадратичной параболой, и является, по сути, вырождением свойств хрупкости и пластичности. Кривая 2 принадлежит к классу умеренно пластичных пород из-за повышенного значения параметра хрупкости, а оба паспорта прочности 4 и 5 относятся к породам со значительной нарушенностью, поскольку коэффициент когезии  $k > 1$ . Эти породы будут проявлять внешние признаки хрупкого поведения, причем порода с паспортом прочности 4 в большей степени, чем с паспортом 3.

Безусловно, необходимо продолжить исследования в этом направлении с целью уточнения предложенной классификации и отнесения каждой из испытанной пробы пород к тому или иному классу.

## 2.4.2 Численное моделирование прочности горных пород

Для исследования степени влияния на прочность горной породы каждого из параметров прочности зададимся исходными значениями прочности некоторой условной горной породы. Пусть такая порода имеет следующие начальные свойства:

$$\tau_0 \equiv 10 \quad \sigma_0 \equiv 4 \quad \kappa := \frac{\tau_0}{\sigma_0} \quad \kappa = 2.5$$

Вначале исследуем, как влияет число открытых (несомкнутых) трещин на паспорт прочности такого материала. Для этого используем уравнение прочности однородного материала с открытыми трещинами, полученное в предыдущем разделе 1:

$$\begin{aligned} \tau(\sigma_n, \alpha, \psi) &:= \tau_0 \cdot \psi \cdot \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0 \cdot \psi} + 1 \right)^{\alpha \cdot \psi} \\ f_0(\sigma_n, \alpha, \psi) &:= \frac{\tau_0 \cdot \psi}{\sigma_0} \cdot \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0 \cdot \psi} + 1 \right)^{\alpha \cdot \psi - 1} \end{aligned}, \quad (2.18)$$

где приняты обычные обозначения, расшифровка которых дана ранее.

Число открытых трещин в материале задаем с помощью безразмерного параметра сплошности  $0 < \psi < 1$ , который может принимать значения  $\psi = 1$ , когда трещины отсутствуют, и  $\psi = 0$ , когда материал полностью разрушен трещинами.

На рис. 2.21 приведены графики паспортов прочности для фиксированного значения параметра хрупкости  $\alpha = 0,3$ , когда сплошность породы уменьшается. Из графиков следует важная закономерность - чем больше открытых трещин, тем меньше зависит прочность породы от параметра хрупкости  $\alpha$ , тем больше проявляются пластические свойства материала. Эту важную закономерность до сих пор исследователи не учитывали, что приводило к грубым ошибкам при ведении инженерных расчетов проявлений горного давления при строительстве и эксплуатации горных предприятий.

Интересно проследить, как изменяется паспорт прочности материала при варьировании параметра хрупкости и при неизменных остальных данных (т.е. с постоянными когезиями сдвига и разрыва). Эту зависимость демонстрирует рис. 2.22, на котором приведены паспорта

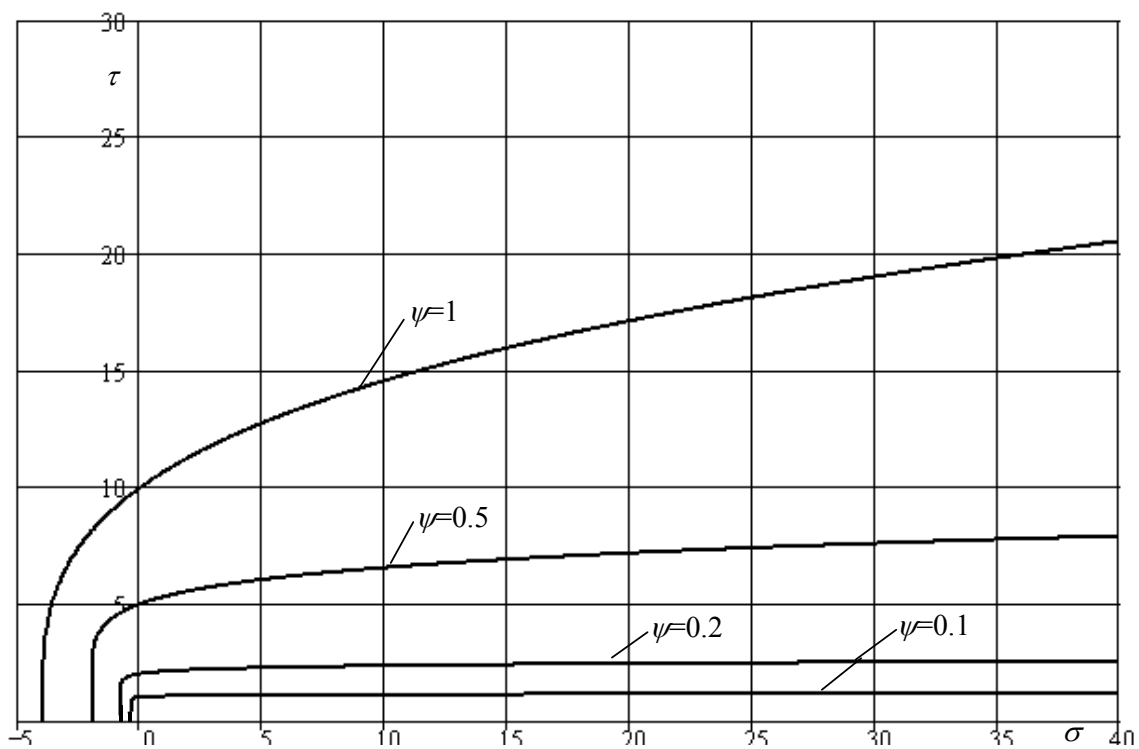


Рис.2.21 – Влияние открытых трещин на паспорт прочности при  $\alpha=0,3$

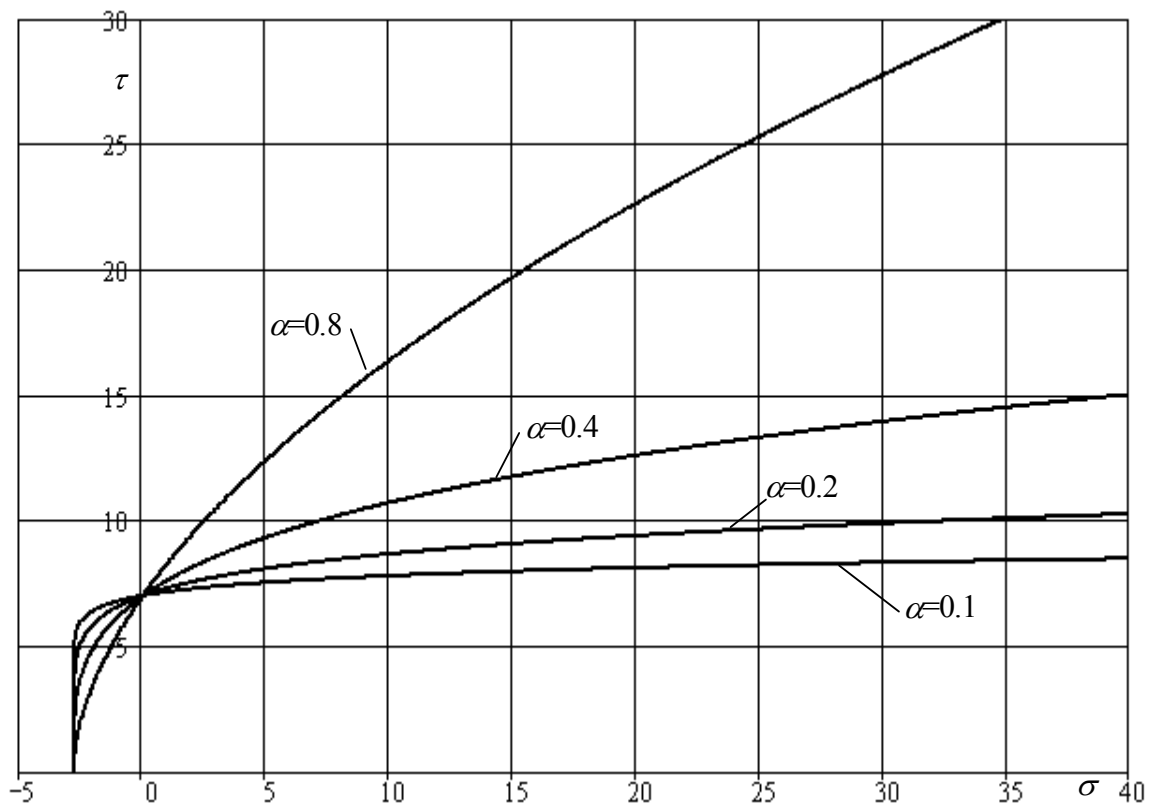


Рис.2.22 – Влияние параметра хрупкости на паспорт прочности при наличии открытых трещин ( $\psi = 0,7$ )

прочности материала по мере возрастания параметра хрупкости. Из графиков следует, что если в области одноосных нагрузок параметры прочности меняются не столь значительно, то в области многоосного

сжатия сопротивление породы разрушению многократно возрастает. Вот почему столь важно использовать аналитическую теорию прочности для описания процессов разрушения пород в подземных условиях, где доминируют многоосное нагружение пород, и даже незначительная неточность в определении угла наклона паспорта прочности может привести к существенным ошибкам.

Рассмотрим изменение прочности материала, содержащего трещины сдвига, т.е. трещины с сомкнутыми кромками. В этом случае, как было показано ранее, уравнение прочности выглядит следующим образом:

$$\tau(\sigma_n, \alpha, \psi) := \tau_0 \cdot \psi \cdot \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0 \cdot \psi} + 1 \right)^{\alpha \cdot (1-\psi)} \cdot \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^{\alpha \cdot \psi} \quad (2.19)$$

Здесь сплошность зависит от наличия сомкнутых трещин сдвига. Построим паспорта прочности и проследим за их изменением по мере уменьшения сплошности. На рис. 2.23 отчетливо видно, что по мере

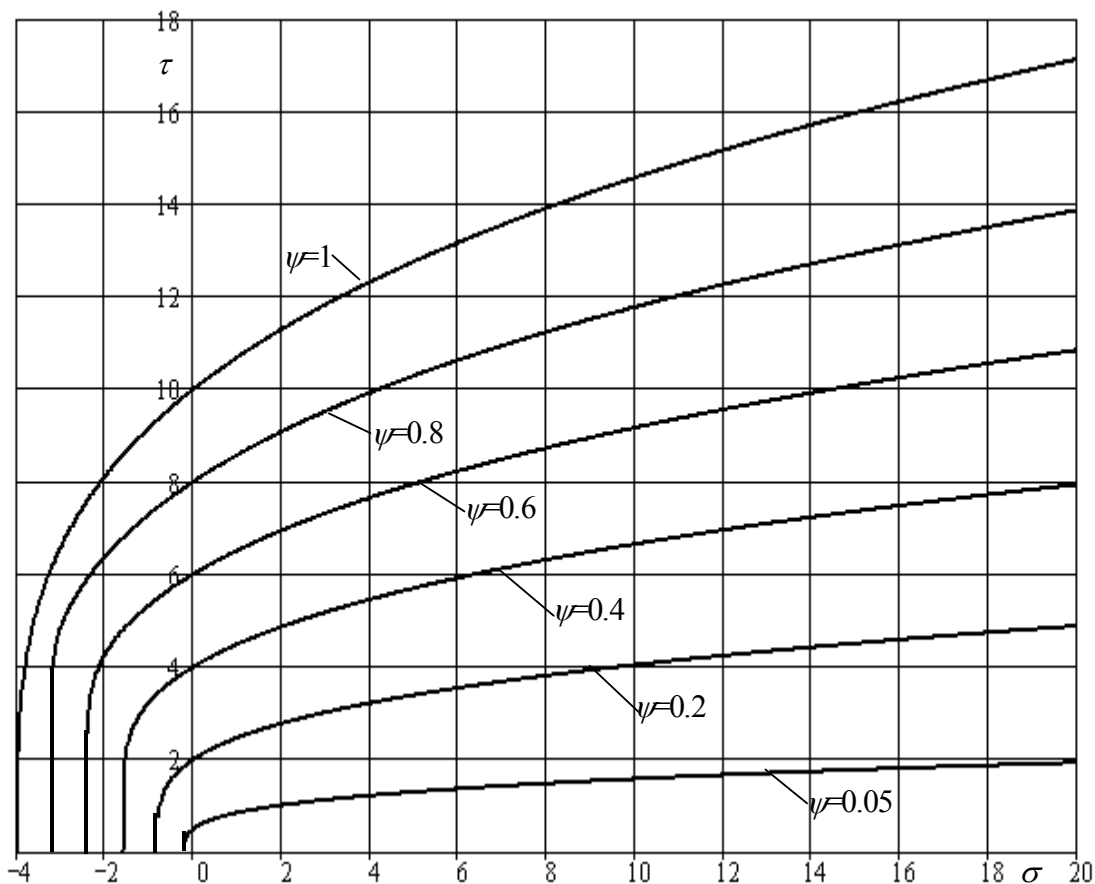


Рис.2.23 –Влияние трещин сдвига на паспорт прочности

увеличения числа сдвиговых трещин (и соответственного уменьшения сплошности материала) прочность постепенно уменьшается, но эффективный параметр хрупкости изменяется не так значительно, как при трещинах с открытыми берегами. Можно проследить, как постепенно снижается эффективные когезии разрыва и сдвига, а материал все ближе приближается к сыпучему состоянию.

Представляет интерес сравнить паспорта прочности одного и того же материала с одинаковым числом открытых и сдвиговых трещин. На рис. 2.24 показаны два паспорта одного и того же материала, которые отражают влияние разного рода трещин на его прочностные свойства.

Как видим, в области одноосных нагрузок (особенно при растяжении) разница в прочностных свойствах невелика. Однако чем больше возрастает шаровой тензор напряжений, тем сильнее видна разница в прочностных свойствах: трещины сдвига оказываются менее опасными, чем трещины с открытыми берегами. Материал со сдвиговыми трещинами с меньшей скоростью стремится к приобретению пластических свойств, чем материал с открытыми трещинами.

Эффект охрупчивания материала, содержащего трещины сдвига, демонстрирует рис. 2.25, на котором приведены графики предельного сдвигающего напряжения при фиксированном нормальном напряжении на площадке сдвига в зависимости от значения параметра хрупкости  $\alpha$ . Графики приведены для различных значений сплошности ( $\psi=1, 0.5, 0.2, 0.05$ ), которая уменьшается по мере роста сдвиговых трещин. Эффект охрупчивания заметен по явно увеличивающейся кривизне графика паспорта прочности при возрастании параметра хрупкости  $\alpha$ . Эта закономерность установлена впервые и ранее была неизвестна.

### 3 ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Инженерная расчетная практика остро нуждается в эффективных методах определения прочностных и деформационных свойств неоднородных объектов и сред. Их типичными примерами могут служить различные виды каменных и бутовых кладок, железобетон, армированные и волокнистые стеклопластики и пр. Свойства таких сред, обладающих

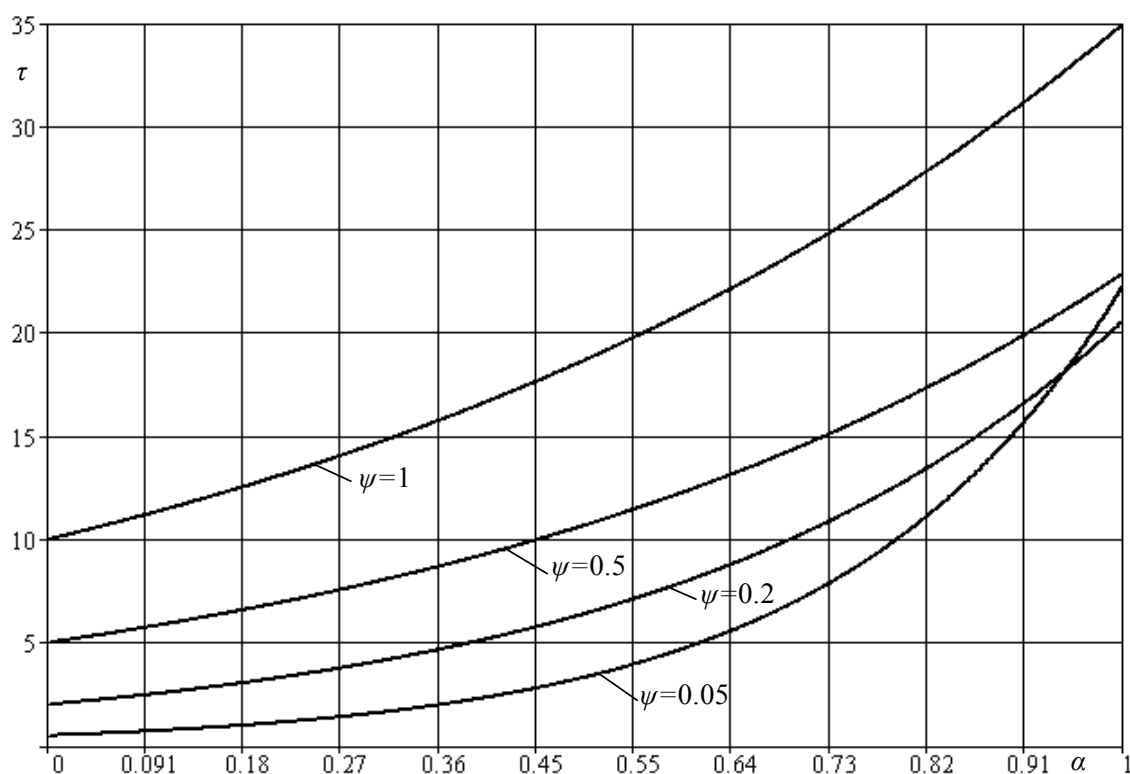


Рис. 2.25 – Влияние трещин сдвига на прочность при изменении параметра хрупкости

неоднородностями различного порядка, определяются по свойствам входящих в их состав компонентов и контактными условиями на их граничных поверхностях. Так, для определения прочности кирпичной кладки, являющейся существенно неоднородной средой, необходимо знать прочность раствора и кирпича, а для железобетона – прочностные параметры бетона и стальной арматуры. Такого рода подход, проверенный десятилетиями инженерной практики, может оказаться плодотворным и при описании свойств горного массива в целом с учетом всей сложности его структурного строения и неоднородностей.

Для определения свойств горного массива “in situ”, как правило, определяют прочность ограниченного его участка или еще более мелких по размеру образцов горных пород, его слагающих. Это вносит существенные и трудно учитываемые изменения в параметры прочности массива по сравнению с исходными параметрами, полученными из эксперимента. Этой проблеме и будет посвящен настоящий раздел.

### **3.1 ПРОЧНОСТЬ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ПОРОД И МАССИВОВ**

Массивы горных пород характеризуются необычайной сложностью строения за счет структурных неоднородностей, главное место в которых занимают поверхности раздела – контакты и трещины. Последние имеют самые разные размеры – от микроскопических до многих сотен и даже тысяч километров [33-36]. Среди неоднородностей массива доминируют трещины и их системы, которые определяют важнейшие свойства массива и его элементов, - прочность, параметры подземной гидродинамики, миграцию газов и др.

Трещинами называют разрывы сплошности в горных породах, у которых раскрытие значительно (на порядок и более) меньше двух остальных размеров, - длины и ширины. Под трещиноватостью понимают совокупность трещин в массиве горных пород. Трещиноватость (макро-трещиноватость) горных пород занимает промежуточное положение среди дефектов и должна изучаться с разных точек зрения – геометрии, морфологии поверхностей, генезиса, водо- и газопроницаемости и др. В нашем случае мы будем рассматривать трещиноватость с позиций ее влияния на прочностные показатели массива горных пород.

#### **3.1.1 Параметры трещиноватости горных пород**

Трещиноватость является одним из главных источников проявления неоднородности горных пород, это – один из важнейших факторов, определяющих взаимодействие инженерных сооружений с массивом. Трещины в горных породах по своему генетическому типу разделяются на три типа:

- естественные (прирожденные), возникающие одновременно с формированием геологического тела;

- тектонические, образованные в результате тектонических деформаций горных массивов;
- технологические (искусственные) – возникающие в процессе инженерной деятельности человека.

Естественные трещины, как правило, приурочены к осадочным породам и меняются от пласта к пласту, причем чаще всего они являются нормально секущими трещинами отрыва. В отличие от естественных, тектонические трещины имеют самые разнообразные размеры и наклонены к плоскостям напластования под разными углами, а их направление часто выдерживается одинаковым для целых регионов. Технологические трещины наиболее специфические и их свойства предопределяются технологическими особенностями воздействия человека на массив (взрывы, создания плотин или дамб и пр.).

Каждая отдельная трещина характеризуется положением в пространстве, которое в геологии принято описывать углом падения  $\varphi$  и азимутом простирания  $\theta$ , а геометрические параметры трещин включают длину, ширину, раскрытие, извилистость стенок и др.

Множество трещин, обладающих общими свойствами и примерно параллельные друг другу, с геометрической точки зрения называют системой трещин. У системы сохраняются выдержанными угол падения  $\varphi$  и азимут простирания  $\theta$ .

Оценим особенности влияния на прочностные свойства пород наличие в них трещиноватости. При этом степень трещиноватости для материалов с трещинами будем описывать, как это делали и ранее, с помощью поврежденности  $\omega = I - \psi$ . Здесь поврежденность трактуется как нарушенность трещинами некоторой произвольно выделенной площадки в материале, т.е. отношение площади трещин на некоторой поверхности к общей ее площади.

Таким образом, целью исследования является получение аналитических выражений паспорта прочности материала (горной породы), содержащего систему трещин или ослабленных зон контактов (ослаблений), которая характеризуется:

- поврежденностью  $\omega = I - \psi$ ;
- условиями на поверхности ослабления – показателем хрупкости  $\alpha$ , когезиями разрыва  $\sigma_0$  и сдвига  $\tau_0$ ,
- углом падения  $\varphi$  и азимутом простирания  $\theta$ .



### 3.1.2 О параметрах и классификации поверхностей ослаблений

Поверхностью ослабления мы будем называть статистически заметное изменение любого из показателей прочности материала, которое прослеживается на заданной в пространстве поверхности, - прямолинейной или криволинейной.

На поверхностях в общем случае могут быть параметры паспорта прочности, отличные от исходного материала - параметр хрупкости  $\alpha_1$ , когезии разрыва  $\sigma_0$  и сдвига  $\tau_0$ . В отличие от поверхности ослабления параметры паспорта прочности материала будем обозначать по старому -  $\alpha$ ,  $\sigma_0$  и  $\tau_0$ . Запись прочности на поверхности ослабления в таком общем виде дает возможность записывать не только пониженные значения параметров прочности, но и повышенные, т.е. имитировать поверхности не только ослабления, но и «упрочнения». Однако, как ясно из физического смысла, роль таких поверхностей упрочнения ничтожно мала, т.к. материал имеет возможность свободно разрушаться вне их пределов и никакого упрочняющего действия такие поверхности производить не могут, пока их совокупность не превратится в пространственный каркас. Этот специфический случай достаточно редок и нами здесь не рассматривается. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать главным образом поверхности ослаблений.

С целью классификации поверхностей ослабления введем безразмерные коэффициенты для каждого из ослаблений, которые показывают степень уменьшения любого из показателей прочности:

$$\alpha' = \alpha_1 / \alpha; \quad \tau' = \tau_0 / \tau_0; \quad \sigma' = \sigma_0 / \sigma_0. \quad (3.1)$$

С позиций поврежденности такая трактовка уменьшения прочностных показателей на поверхности ослабления является более общей, чем ранее использовавшееся в теории прочности понятие поврежденности  $\psi$ . Другими словами, для каждого прочностного параметра поверхности ослабления мы принимаем свой показатель поврежденности. Таким образом, поверхность ослабления является общим случаем учета прочностных дефектов или вариаций прочности материала (горной породы или массива).

Из физического смысла постановки задачи можно выделить (табл. 3.1) следующие типы структурных неоднородностей в виде по-

верхностей ослабления (но не упрочнения, которое здесь не рассматриваются):

Таблица 3.1 – Классификация поверхностей ослаблений

| Типы ослаблений     | По параметру хрупкости<br>$\alpha' = \alpha_1 / \alpha$ | По когезии сдвига<br>$\tau' = \tau_{01} / \tau_0$ | По когезии разрыва<br>$\sigma' = \sigma_{01} / \sigma_0$ |
|---------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 1 - пластическое    | <1                                                      | 1                                                 | 1                                                        |
| 2 - сдвиговое       | 1                                                       | <1                                                | 1                                                        |
| 3 – по разрыву      | 1                                                       | 1                                                 | <1                                                       |
| 4 – по прочности    | 1                                                       | <1                                                | <1                                                       |
| 5 – общее           | <1                                                      | <1                                                | <1                                                       |
| 6 –трещина сдвига   | 1                                                       | 0                                                 | 0                                                        |
| 7 - трещина разрыва | 0                                                       | 0                                                 | 0                                                        |

### 3.1.3 Полярная диаграмма прочности при одной трещине

Задача исследований состоит в том, чтобы показать зависимость паспорта прочности от ориентации и прочностных показателей поверхности ослабления в материале.

Запишем исходные уравнения для решения задачи. Пусть исходная прочность материала описывается параметрами паспорта прочности - показателем хрупкости  $\alpha$ , когезиями разрыва  $\sigma_0$  и сдвига  $\tau_0$ . Пусть материал ослаблен хаотически расположенными трещинами, которые создают в материале фоновую поврежденность  $\omega$ , сплошность такого материала будет равна, как и ранее  $\psi = 1 - \omega$ .

Тогда в обозначениях программы MathCAD мы можем записать уравнение прочности ненарушенного материала в виде:

$$\tau(\sigma, \alpha) := \tau_0 \cdot \left[ \sigma \cdot (\sigma_0)^{-1} + 1 \right]^\alpha. \quad (3.2)$$

Уравнение паспорта прочности структурно нарушенного открытыми трещинами материала записывается, согласно исследованиям в разделе 2, в виде:

$$\tau(\sigma, \alpha, \psi) := \psi \cdot \tau_0 \cdot \left[ \sigma \cdot (\sigma_0 \cdot \psi)^{-1} + 1 \right]^{\psi \cdot \alpha}. \quad (3.3)$$

Коэффициент угла внутреннего трения  $f = \operatorname{tg} \varphi$  записывается как производная касательного напряжения по нормальному напряжению в любой точке паспорта прочности, заданной на диаграмме О.Мора значением нормального напряжения  $\sigma$  на площадке разрушения

$$f(\sigma, \alpha, \psi) := \alpha \cdot \psi \cdot \tau_0 \cdot (\sigma_0)^{-1} \cdot [\sigma \cdot (\psi \cdot \sigma_0)^{-1} + 1]^{\alpha \cdot \psi - 1}. \quad (3.4)$$

Запишем уравнение паспорта прочности для определения максимального главного напряжения  $\sigma_1$  как функцию от нормального напряжения  $\sigma$  на площадке разрушения и параметров прочности  $\alpha$  и  $\psi$ :

$$F\sigma_1(\sigma, \alpha, \psi) := \sigma + \psi \cdot \tau_0 \cdot [\sigma \cdot (\psi \cdot \sigma_0)^{-1} + 1]^{\alpha \cdot \psi} \cdot \left[ f(\sigma, \alpha, \psi) + \left[ 1 + (f(\sigma, \alpha, \psi))^2 \right]^{0.5} \right]. \quad (3.5)$$

Как видим, это трансцендентное уравнение, в котором использовано выражение (3.4) для коэффициента угла внутреннего трения. Запишем подобное уравнение для минимального главного напряжения  $\sigma_3$ :

$$F\sigma_3(\sigma, \alpha, \psi) := \sigma + \psi \cdot \tau_0 \cdot [\sigma \cdot (\psi \cdot \sigma_0)^{-1} + 1]^{\alpha \cdot \psi} \cdot \left[ f(\sigma, \alpha, \psi) - \left[ 1 + (f(\sigma, \alpha, \psi))^2 \right]^{0.5} \right] \quad (3.6)$$

Чтобы определить прочность на одноосное сжатие  $\sigma_c$  материала с трещинами, воспользуемся уравнением (3.6), в котором надо положить напряжение  $\sigma_3 = 0$  и найти соответствующее ему значение нормального напряжения  $\sigma$ , а затем найденное значение  $\sigma$  следует подставить в уравнение (3.5), которое и даст значение прочности материала на одноосное сжатие.

Графики на рис. 3.1 дают представление о зависимости прочности на одноосное сжатие от степени нарушенности материала и показателя хрупкости. Как видим из графиков, предел прочности на одноосное сжатие резко уменьшается по мере роста числа трещин в материале, когда паспорт прочности нелинеен ( $\alpha > 0$ ), изменение этого предела прочности происходит более резко, уменьшаясь до нуля при полном разрушении материала  $\psi = 0$ . Такого же рода зависимости соблюдаются и для

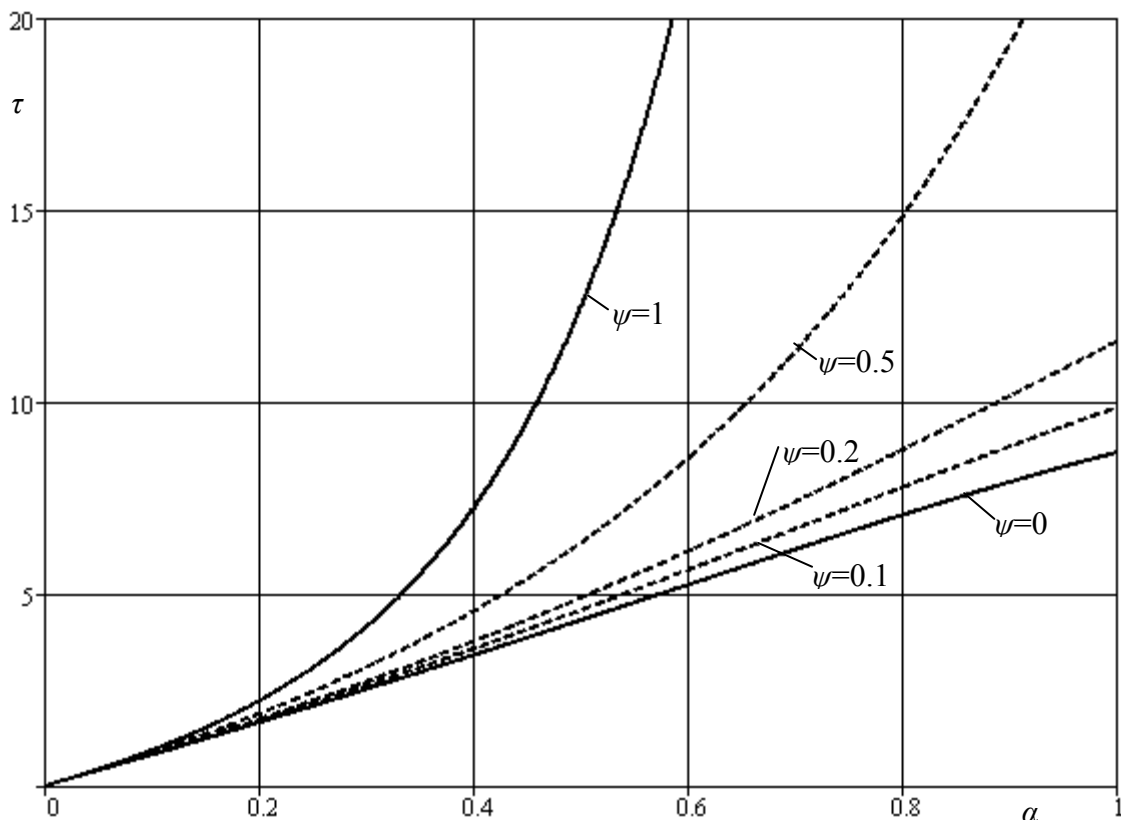


Рис. 3.1 - Зависимость прочности материала на одноосное сжатие  $\sigma_c$  при изменении сплошности  $0 < \psi < 1$  и показателя хрупкости  $0 < \alpha < 1$  для материала с  $\sigma_t = 4$ ;  $\sigma_c = 2$  МПа

предела прочности на одноосное растяжение. Все вычисления удобно производить с помощью программы MathCAD. В случае его отсутствия то же можно выполнить и с помощью геометрических построений.

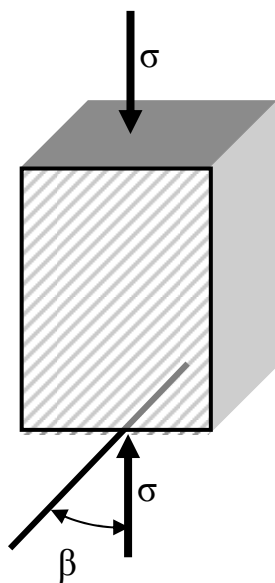


Рис. 3.2 – Расчетная схема слоистого образца

### 3.1.3.1 Прочность трещиноватого массива при одноосном сжатии

Перейдем к определению прочности материала (горной породы) при одноосном сжатии, когда в ней имеются поверхности ослабления в виде согласно наклоненных под углом  $\beta$  трещин или поверхностей ослаблений.

На рис. 3.2 представлена расчетная схема одноосного нагружения образца с поверхностями ослабления общего типа (по классификации табл. 3.1 - тип 5).

Запишем условие прочности на поверхности ослабления в виде разности между предельными и действующими касательными напряжениями

$$Y(\sigma, \beta, \psi) := \tau_{01} \cdot \psi \cdot \left[ \frac{\sigma \cdot (\cos(\beta))^2}{\sigma_{01} \cdot \psi} + 1 \right]^{\alpha_1 \cdot \psi} - \frac{\sigma}{2} \cdot \sin(2 \cdot \beta) \quad (3.6)$$

В этом уравнении если искомая функция  $Y$  меняет знак по мере увеличения напряжений  $\sigma$ , то материал разрушается по поверхности ослабления, в противном случае разрушение по поверхности ослабления не произойдет. Используя вышеприведенные зависимости, можно записать алгоритм определения прочности на наклонных трещинах в материале. Проанализируем при одноосном нагружении графики поведения материала с трещинами разрыва и сдвига, т.е. с открытыми и сомкнутыми берегами.

На рис. 3.3 представлены диаграммы изменения предела прочности на одноосное сжатие материала с трещинами разрыва по мере увеличения их наклона, а на рис. 3.4 – полярная диаграмма для того же случая. Из графиков рис. 3.3 видно, как по мере уменьшения сплошности становятся все заметнее «провалы» прочности при изменении азимута падения трещины. Такие закономерности изменения прочности показывают важность осознанного и обоснованного выбора направления ведения горных работ и размещения выработок. Те же сведения, но в более наглядном виде представлены на полярной диаграмме изменения прочности рис. 3.4. При уменьшении сплошности менее 0,1-0,2, прочность массива горных пород становится существенно анизотропной, снижаясь почти по всем направлениям до минимума и сохраняя сплошность лишь по узкому направлению, перпендикулярному азимуту падения трещин.

Составленный алгоритм позволяет также определить диаграмму прочности материала, содержащего трещины с несомкнутыми берегами, т.е. трещины отрыва. Как изменяется предел прочности на одноосное сжатие у материала с оставшейся сплошностью  $\psi=0,5$  на поверхности ослабления можно проследить по графикам на рис. 3.5, где приведена диаграмма  $\sigma_1(\theta)$  прочности  $\sigma_c$  горной породы с параметрами  $\tau_0=20$  МПа,  $\sigma_0=10$  МПа и  $\alpha=0.4$ , при одной плоскости ослабления трещинами отрыва

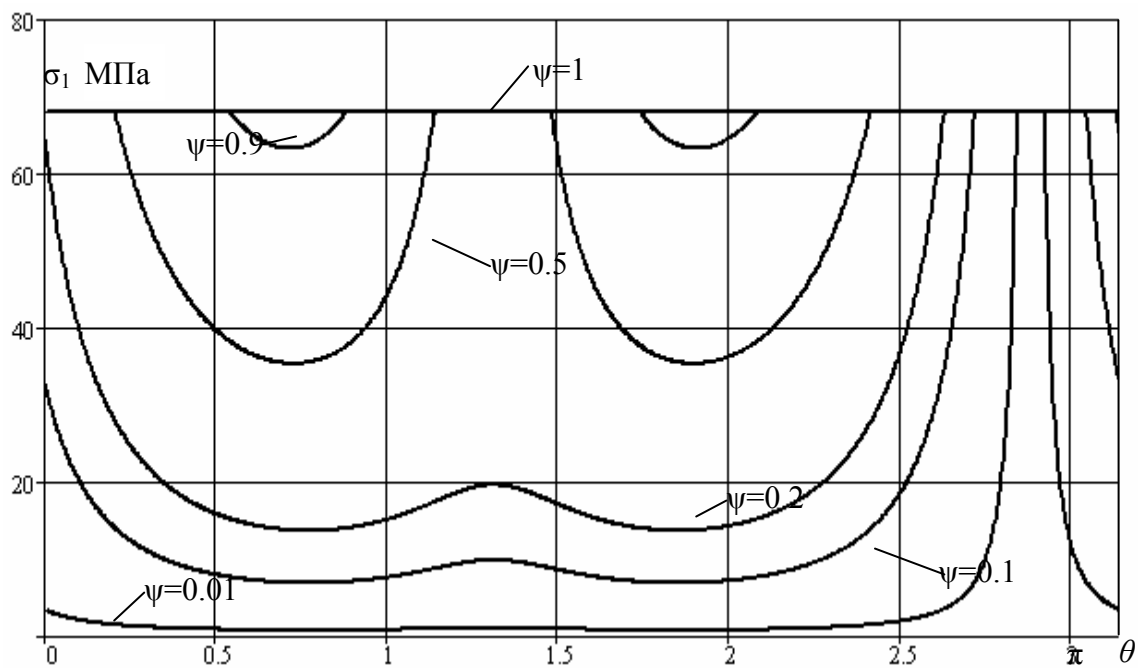


Рис. 3.3 - Диаграмма  $\sigma_1(\theta)$  прочности на одноосное сжатие породы с  $\tau_0=20$  МПа,  $\sigma_0=10$  МПа и  $\alpha=0.4$  и плоскостью ослабления с азимутом падения 20 гр.  $\alpha_1=0.4$

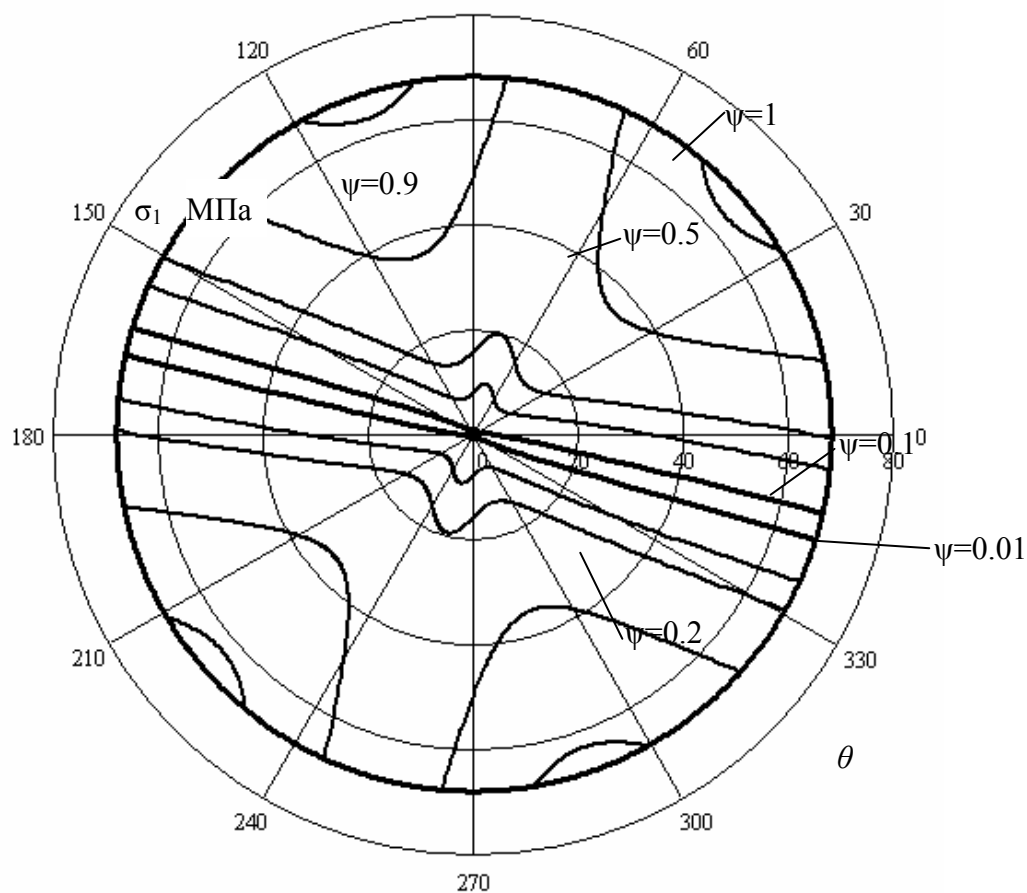


Рис. 3.4 – Полярная диаграмма  $\sigma_1(\theta)$  прочности на одноосное сжатие породы по рис. 3.3

с азимутом падения 20 градусов,  $\alpha_1=0$  и различной степенью сплошности  $\psi$ .

Как показывает сравнение полученных графиков, поверхность ослабления оказывает в ряде случаев значительное влияние на предел прочности горных пород. Особенно сильно влияют трещины, на которых отсутствует или оказывается пониженным трение. Это доказывает сравнение рис. 3.3 и 3.4 с графиками на рис. 3.5 и 3.6. Трещины отрыва оказывают большее влияние, чем трещины сдвига с точки зрения снижения прочности. Здесь прослеживаются те же закономерности, что и на предыдущих графиках, однако изменения прочности становятся еще более резкими, что подтверждает вполне ожидаемую особенность влияния открытых трещин, которые всегда являются более опасными, чем закрытые.

### ***3.1.3.2 Прочность массива с трещинами при боковом подпоре***

Интерес представляет изменение графиков прочности массива, если имеется не равное нулю второе напряжение бокового подпора  $\sigma_2$ , что представлено на рис. 3.7 в виде диаграммы  $\sigma_1(\theta)$  породы при  $\tau_0=20$  МПа,  $\sigma_0=10$  МПа и  $\alpha=0.4$ , с одной плоскостью ослабления трещиной сдвига с азимутом падения 20 гр.,  $\alpha_1=0.4$  при боковом подпоре  $\sigma_3=10$  МПа. На рис. 3.8 приведена диаграмма для породы с  $\tau_0=20$  МПа,  $\sigma_0=10$  МПа и  $\alpha=0.4$ , ослабленной трещинами сдвига с азимутом падения 20 градусов,  $\alpha_1=0.4$  при боковом подпоре  $\sigma_3=20$  МПа.

Именно в таких случаях структурно неоднородного материала, каким являются горные породы и массивы, «промежуточное» напряжение играет существенную роль при изменениях прочности. Воозможно, именно это обстоятельство ранее не учитывалось при получении опытных данных, подтверждающих влияние среднего напряжения на прочность, что ошибочно трактовалось в пользу «обобщенных» критериев прочности, когда принимались в расчет все компоненты главных напряжений.

Разработанный алгоритм учета влияния различных трещин на предел прочности горных пород оказывается особенно полезным в тех случаях, когда под влиянием влаги, проникающей в трещины, происходит снижение параметра хрупкости. В таких довольно часто встречающихся случаях можно не только доказательно объяснить причины, но и

предсказать последствия ряда опасных явлений, происходящих в массиве пород.

Так, в осенне-весенние периоды повышенной сезонной влажности, когда поверхностные воды проникают по трещинам в глубь земли, можно путем геодезических наблюдений и геофизических опробований массива получить исходные данные, чтобы сделать важный прогноз об ожидаемом изменении устойчивости бортов карьеров, откосов, насыпей и других геоморфологических структур с помощью разрабатываемых здесь подходов. Количественное предсказание степени понижения устойчивости может стать важным элементом проектирования горно-инженерных сооружений и прогнозирования их устойчивости, особенно при наличии трещиноватости и изменяющейся влажности.

### **3.1.4 Прочность массива с несколькими поверхностями ослабления**

На практике массивы горных пород и реальные материалы могут иметь сложное структурное строение, в частности, в них встречаются несколько различных систем трещин и поверхностей ослабления. Поэтому представляет интерес задача разработки вычислительного алгоритма по определению прочности дефектного материала с несколькими поверхностями разрушения с использованием не упрощенных, а аналитической теории прочности.

Эта задача возникла почти одновременно с началом разработки разных теорий прочности и к ней часто прибегали при демонстрации их приложения для решения актуальных задач производственной и проектной практики.

Для изучения закономерностей разрушения материала, содержащего одну или несколько поверхностей ослабления, был выполнен, начиная с 30-х годов прошлого века, достаточно большой объем исследований. Одним из первых этой проблемой начал заниматься проф. Г.Н. Кузнецов, которым в 1961 г. проведен обзор предшествующих исследований. Им дано обобщение задачи по графической оценке предела прочности горной породы, имеющей поверхности ослабления, для любых случаев их пространственной ориентации [37]. В ряде последующих работ других авторов [38-43 и др.] эти идеи получили дальнейшее развитие в виде аналитических расчетов для определения зон разрушения пород вокруг горной выработки с учетом пространственной ориентировки поверхностей ослабления.



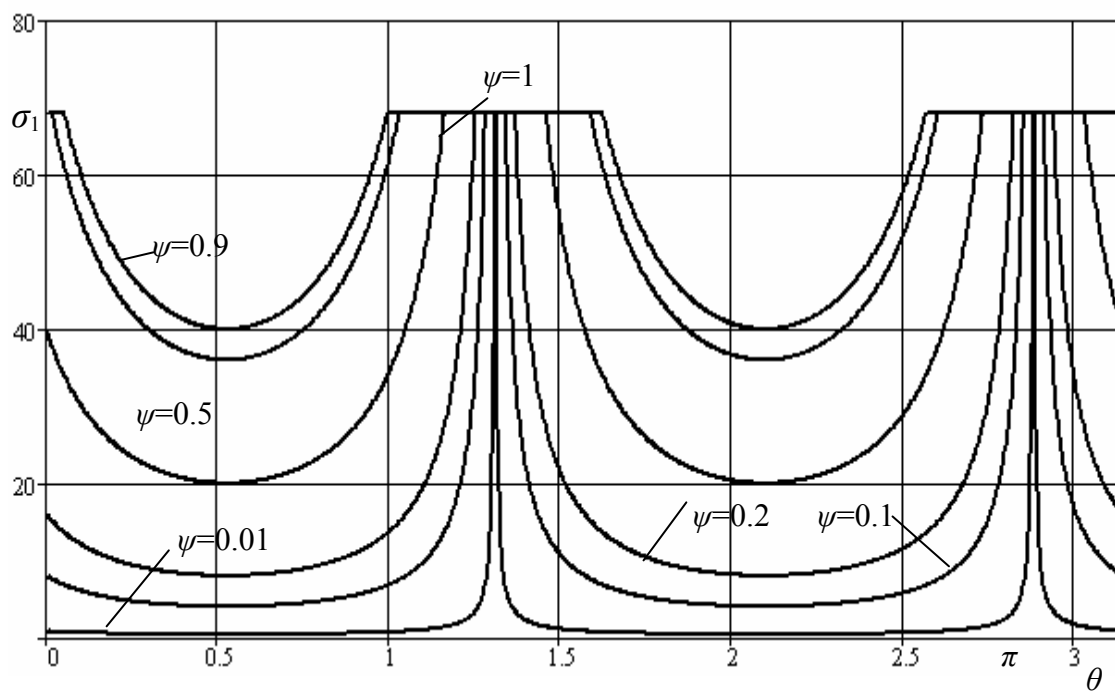


Рис. 3.5 - Диаграмма  $\sigma_1(\theta)$  прочности  $\sigma_c$  горной породы

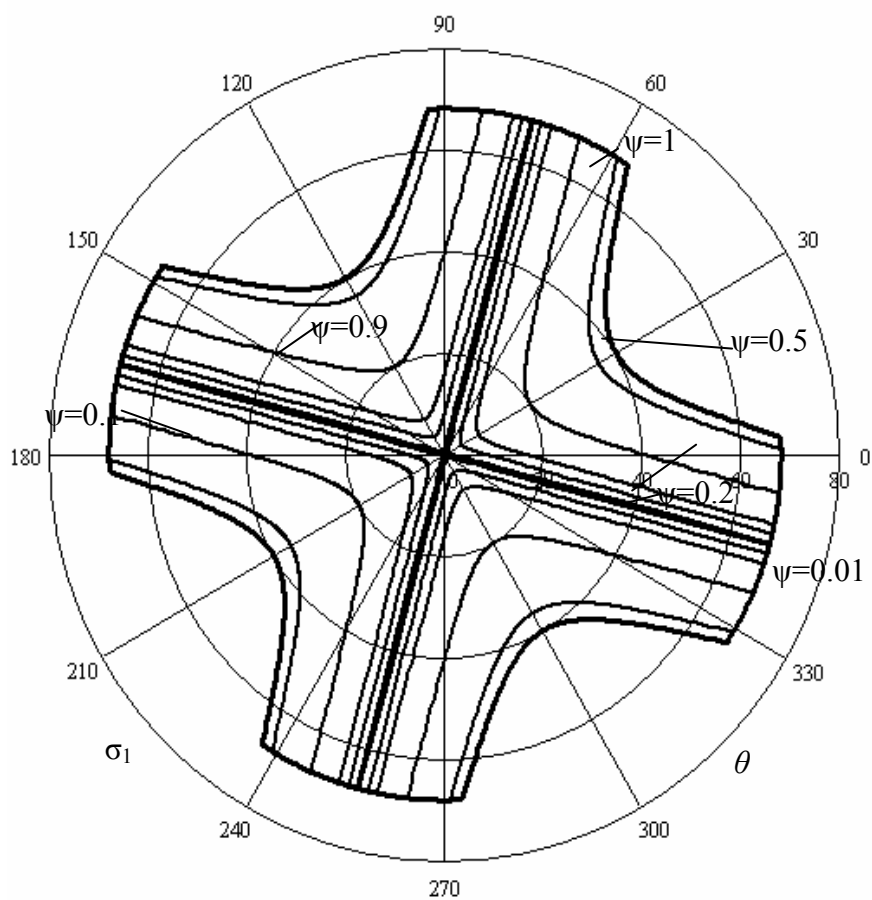


Рис. 3.6 – Полярная диаграмма  $\sigma_1(\theta)$  прочности  $\sigma_c$  горной породы по рис. 3.5

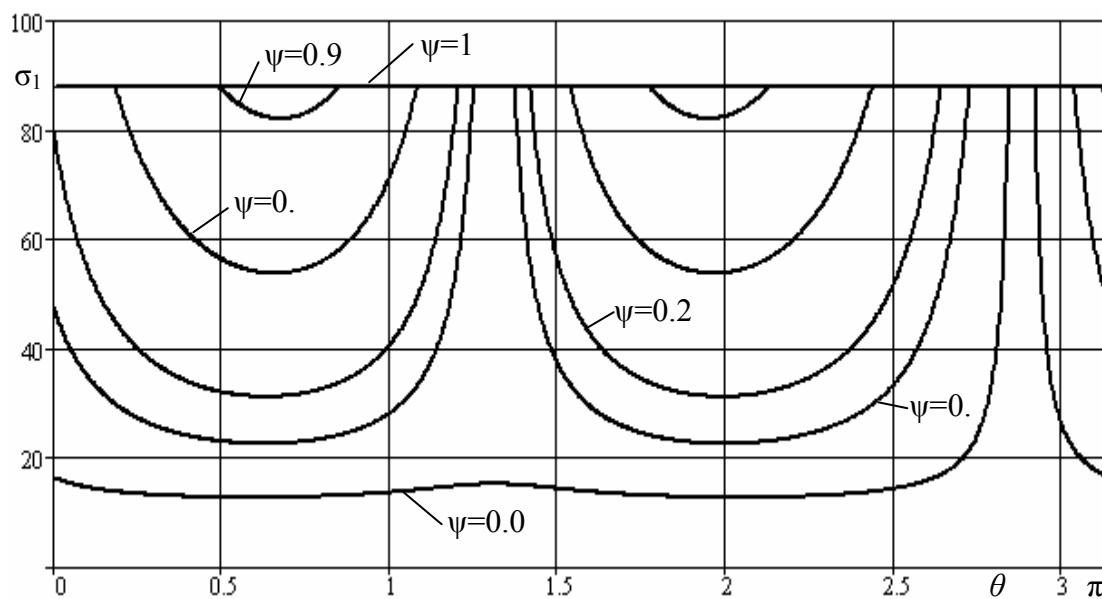


Рис. 3.7 - Диаграмма  $\sigma_1(\theta)$  с одной плоскостью ослабления при боковом подпоре  $\sigma_3=10$  МПа

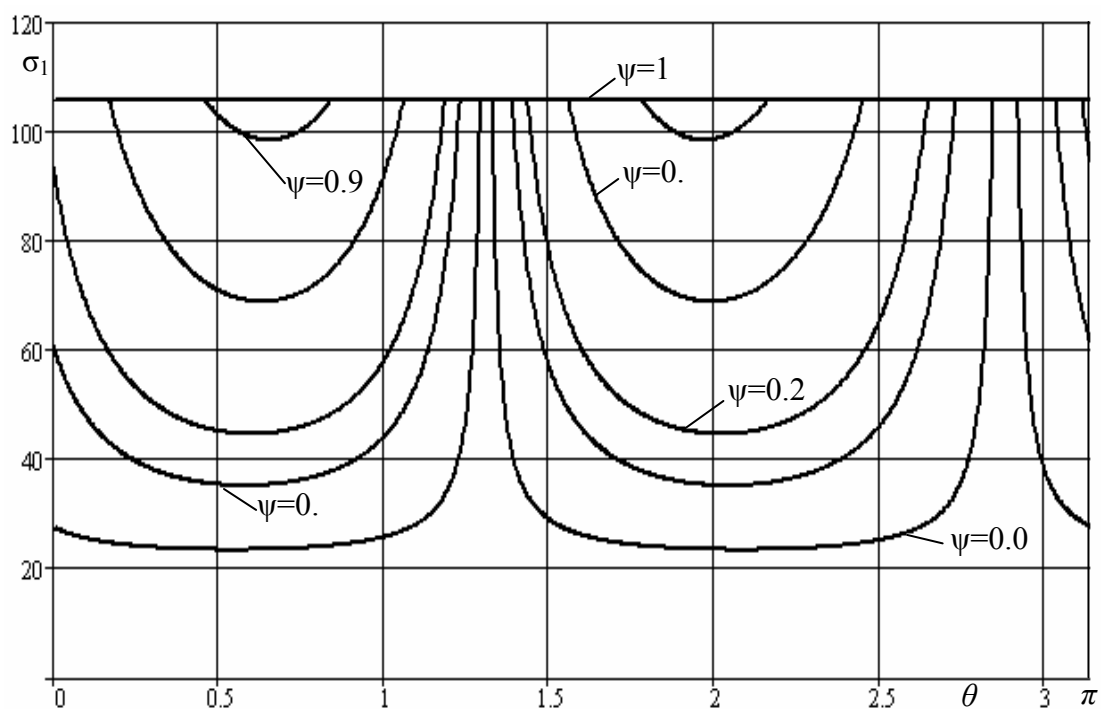


Рис. 3.8 - Диаграмма  $\sigma_1(\theta)$  для породы ослабленной трещинами сдвига при боковом подпоре  $\sigma_3=20$  МПа

Недостатками этих работ следует считать рассмотрение простейших случаев прочности материала (как правило, идеально связанное

или пластичное тело). Таким образом, хотя данной задаче было посвящено большое число работ отечественных и зарубежных работ, однако исследования в этом направлении нельзя считать исчерпывающими. Представляет интерес оценка прочностных свойств материалов не только графическими методами, но и с помощью аналитики, не только для одноосного напряженного состояния, но и для произвольного напряженного состояния, не только для линейных алгебраических теорий прочности, но и в рамках более общей, - аналитической, - теории прочности.

Рассмотрим две родственные задачи в этом направлении, а именно, определим прочность дефектного тела с поверхностями ослабления при нагружении:

- по схеме Кармана, когда  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , задано значение  $\sigma_3$  и требуется найти предельное минимальное значение  $\sigma_1$ , при котором произойдет разрушение (частный случай  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ );

- по схеме Беккера, когда  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , задано значение  $\sigma_1$  и требуется найти предельное максимальное значение  $\sigma_3$ , при котором произойдет разрушение (частный случай  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ).

#### ***3.1.4.1 Прочность массива при нагружении по схеме Кармана***

Рассмотрим алгоритм определения прочности при нагружении материала по схеме Кармана. В общем случае для описания прочностных свойств материала будем использовать матрицу, в которой по строкам последовательно вводятся параметры прочности для исходного неповрежденного материала, а затем – параметры прочности для поверхностей ослабления.

Таким образом, в матрице strength будут обозначены параметры уравнения прочности материала  $\sigma_0; \tau_0; \alpha_i$ ; причем  $0 \leq i \leq 3$  (четыре значения по числу объектов описания);  $0 \leq j \leq 2$  (три значения по числу прочностных параметров) - соответственно  $i$ - номер поверхности ослабления и  $j$  - номер параметра уравнения прочности. Например, при  $i=0$  получаем прочностные свойства исходного ненарушенного (однородного) материала.

Матрица прочностных свойств выглядит следующим образом:

$$\text{strength} := \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0.4 \\ 10 & 6 & 0.3 \\ 6 & 4 & 0.2 \\ 3 & 2 & 0.1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} j := 0..2 \\ i := 0..3 \end{matrix} \quad (3.7)$$

Исходя из принятых условных обозначений в матрице (3.7), можно в обозначениях программы MathCAD считать, что

$$\tau_{0i} := \text{strength}_{i,0} \quad \sigma_{0i} := \text{strength}_{i,1} \quad \alpha_i := \text{strength}_{i,2} \quad (3.8)$$

Тогда уравнение аналитической теории прочности для любой из составляющих материала  $i$  в общем виде запишется следующим образом:

$$\tau(i, \sigma_n) := \tau_{0i} \cdot \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_{0i}} + 1 \right)^{\alpha_i} \quad (3.9)$$

В тех же обозначениях запишем уравнения для вычисления угла внутреннего трения

$$f(i, \sigma_n) := \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_{0i}} + 1 \right)^{\alpha_i - 1} \cdot \alpha_i \cdot \frac{\tau_{0i}}{\sigma_{0i}} \quad (3.10)$$

Для определения прочности однородного материала при нагружении по схеме Кармана введем вспомогательную функцию  $f1$ , позволяющую найти нормальное напряжение на площадке разрушения по известному значению минимального главного напряжения  $\sigma_3$ :

$$f1(\sigma_n, \sigma_3) := \sigma_3 - \sigma_n + \tau(0, \sigma_n) \cdot \left( \sqrt{1 + f(0, \sigma_n)^2} - f(0, \sigma_n) \right) \quad (3.11)$$

Как видим, уравнение (3.11) является трансцендентным, поэтому его решаем с помощью процедуры «root» пакета MathCAD, в уравнении root неизвестную переменную обозначим через  $z$ , а решение -  $\text{solv } \sigma_n(\sigma_3)$ :

$$\text{solv\_}\sigma_n(\sigma_3) := \text{root}(f1(z, \sigma_3), z) \quad (3.12)$$

Используя уравнение прочности для однородного материала (3.9), определим значение предельного касательного напряжения на площадке разрушения:

$$\tau_{Pr\_0}(\sigma_3) := \tau(0, \text{solv\_}\sigma n(\sigma_3)). \quad (3.13)$$

По известному предельному значению касательного напряжения на площадке разрушения можно вычислить предельное значение максимального напряжения  $\sigma_1$  при заданном уровне минимальных напряжений  $\sigma_3$ :

$$\sigma_1(\sigma_3) := \text{solv\_}\sigma n(\sigma_3) + \tau(0, \text{solv\_}\sigma n(\sigma_3)) \cdot \left( f(0, \text{solv\_}\sigma n(\sigma_3)) + \sqrt{1 + f(0, \text{solv\_}\sigma n(\sigma_3))^2} \right) \quad (3.14)$$

Теперь достаточно подставить в функцию значение  $\sigma_3$  и получим ему соответствующее предельное значение максимального нормального напряжения  $\sigma_1$ :

$$\sigma_1(0) = 68.088 \quad \sigma_1(10) = 88.091 \quad \sigma_1(50) = 153.044 \quad \sigma_1(100) = 223.39 \quad (3.15)$$

С помощью подобной вычислительной процедуры не составляет труда определить угол внутреннего трения  $\rho$  (в радианах) на любом участке паспорта прочности при произвольном нагружении материала, которое задается напряжением  $\sigma_3$  в уравнении (3.12)

$$\rho_i := \text{atan}(f(i, \text{solv\_}\sigma n(\sigma_3))) \quad \rho = \begin{pmatrix} 0.305 \\ 0.125 \\ 0.046 \\ 0.01 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Разработав вычислительные процедуры для однородного материала, рассмотрим породу с поврежденностью в виде плоскости ослабления с азимутом простираения  $0 \leq \varphi \leq \pi$  и углом падения  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  относительно главных напряжений. При этом принято, что:

$\varphi$  – это угол в горизонтальной плоскости между линией прости-  
рания плоскости ослабления и вторым главным напряжением  $\sigma_2$ ;

$\theta$  – это угол в вертикальной плоскости между первым главным  
напряжением  $\sigma_1$ , направленным по вертикали, и нормалью к плоскости  
ослабления (угол падения).

В формулах алгоритма решения будут также использованы обо-  
значения углов, задающих положение поверхности ослабления –  $\Phi$ ,  $\Theta$ ,  
которые введены для построения графиков, остальные углы фиксируют  
положение плоскостей ослабления относительно друг друга ( $\varphi_0=0$  и  $\theta_0 =$   
 $0$  - для однородного материала).

Зададим для определенности углы ориентации поверхностей ос-  
лабления в виде:

$$\phi_1 := \frac{\pi}{180} \cdot 15 \quad \theta_1 := \frac{\pi}{180} \cdot 15 \quad \phi_2 := \frac{\pi}{180} \cdot 30 \quad \theta_2 := \frac{\pi}{180} \cdot 30 \quad \phi_3 := \frac{\pi}{180} \cdot 45 \quad \theta_3 := \frac{\pi}{180} \cdot 45$$

Для определения напряжений  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  на площадке, заданной уг-  
лами  $\varphi$  - азимутом и  $\theta$  – падения при известных главных напряжениях  
 $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  можно составить систему уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 + \tau_n^2 &= \sigma_1^2 \cdot \alpha_{n1}^2 + \sigma_2^2 \cdot \alpha_{n2}^2 + \sigma_3^2 \cdot \alpha_{n3}^2 \\ \sigma_n &= \sigma_1 \cdot \alpha_{n1}^2 + \sigma_2 \cdot \alpha_{n2}^2 + \sigma_3 \cdot \alpha_{n3}^2, \\ 1 &= \alpha_{n1}^2 + \alpha_{n2}^2 + \alpha_{n3}^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

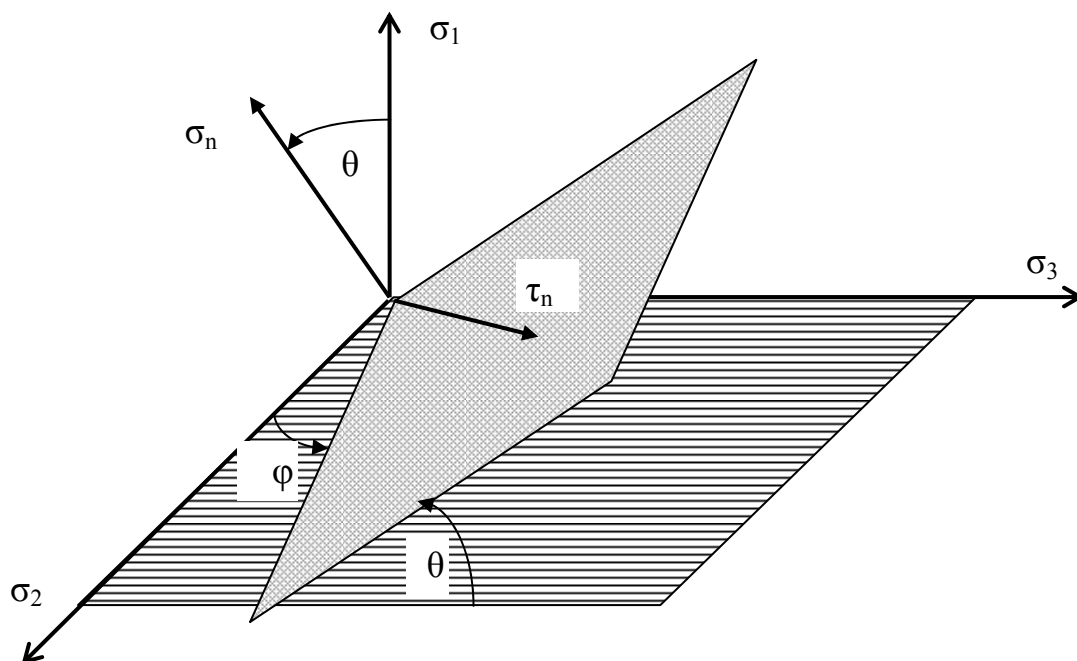
где  $\alpha_{n1}$ ,  $\alpha_{n2}$  и  $\alpha_{n3}$  - соответственно косинусы углов между нормалью к  
площадке и главными осями [44].

Углы между нормалью к площадке и главными осями выража-  
ются через углы Эйлера по известным соотношениям [44]:

$$\begin{aligned} \alpha_{n1} &= \cos(\theta); \\ \alpha_{n2} &= \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta); \\ \alpha_{n3} &= -\cos(\varphi) \cdot \sin(\theta). \end{aligned}$$

Подставляя значения  $\alpha_{n1}$ ,  $\alpha_{n2}$  в (3.17) и выражая  $\alpha_{n3}$  через  $\alpha_{n1}$ ,  
 $\alpha_{n2}$ , получим после преобразований

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \cos(\theta)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\theta)]^2 + \sigma_3; \\ \tau_n &= \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) \cdot \cos(\theta)^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\theta)]^2 + \sigma_3^2 - \sigma_n^2}. \end{aligned}$$



$\varphi$  – угол прецессии;  $\theta$  – угол нутации

Рис. 3.9 – Расчетная схема к определению напряжений  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  на произвольной площадке через главные напряжения и углы Эйлера

Нормальные напряжения предельного круга Мора на  $i$ -той плоскости ослабления можно записать в обозначениях пакета MathCAD следующим выражением:

$$\sigma_n(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \cos(\Theta + \theta_i)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) \cdot (\sin(\Phi + \phi_i) \cdot \sin(\Theta + \theta_i))^2 + \sigma_3^2 \quad (3.18)$$

Запишем уравнение для касательного напряжения предельного круга Мора на  $i$ -той плоскости ослабления

$$\tau_n(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := \sqrt{S(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - (\sigma_n(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3))^2}$$

$$S(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) \cdot \cos(\Theta + \theta_i)^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) \cdot (\sin(\Phi + \phi_i) \cdot \sin(\Theta + \theta_i))^2 + \sigma_3^2 \quad (3.19)$$

Отсюда можно получить уравнение прочности на  $i$  плоскости ослабления с помощью аналитической теории прочности с учетом параметров прочности для этой плоскости ослабления:

$$\tau(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := \tau_{0i} \cdot \left( \frac{\sigma_n(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\sigma_{0i}} + 1 \right)^{\alpha_i} \quad (3.20)$$

Введем для дальнейших преобразований вспомогательную функцию прочности  $Y$  на  $i$ -той плоскости ослабления, равную нулю, когда при действующем распределении напряжений,  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2$ ;  $\sigma_3$ , касательные напряжения на  $i$ -той плоскости ослабления равны прочности

$$Y_{-1}(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := |\tau_n(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)| - \tau(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (3.21)$$

Кроме того, необходимо учесть случай, когда сохраняется заданное соотношение между главными напряжениями, соответствующее нагружению Кармана:

$$Y_{-1}(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := \text{if}(\sigma_1 < \sigma_2, Y_{-1}(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_3), Y_{-1}(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)) \quad (3.21)$$

Теперь мы можем определить предельное значение максимального главного напряжения  $\sigma_1$ , которое соответствует прочности массива с заданной системой поверхностей нагружения. Для вычислительной процедуры зададимся начальными значениями искомой переменной, которую обозначим  $x = \sigma_1$  в пределах:  $\sigma_3 < x < 1000$ , где  $\sigma_3$  – минимально возможное значение искомой переменной. Используем для решения задачи вычислительную процедуру “root”:

$$S_{\sigma_1}(i, \Phi, \Theta, \sigma_2, \sigma_3) := \text{root}(Y_{-11}(i, \Phi, \Theta, x, \sigma_2, \sigma_3), x, \sigma_3, x_1) \quad (3.22)$$

Очевидно, что итоговая прочность массива горных пород с учетом всех плоскостей ослабления по всему диапазону изменения углов их падения и азимутов простирания будет равна огибающей по минимальной прочности существующих поверхностей ослабления:

$$S_{\sigma_1}(\Phi, \Theta, \sigma_2, \sigma_3) := \min \begin{pmatrix} S_{\sigma_1}(1, \Phi, \Theta, \sigma_2, \sigma_3) \\ S_{\sigma_1}(2, \Phi, \Theta, \sigma_2, \sigma_3) \\ S_{\sigma_1}(3, \Phi, \Theta, \sigma_2, \sigma_3) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$



Используя это определение, можно построить диаграмму прочности для массива в целом по каждому фиксированному азимуту простирания, что представлено на рис. 3.10. Здесь для всех трех поверхностей ослабления показаны три диаграммы прочности, которые расположены под горизонтальной прямой, отражающей прочностные свойства ненарушенного массива. Из-за несовпадения азимутов простирания, диаграммы прочности смещены в пространстве по этому углу и могут пересекаться самым замысловатым образом. По каждому отдельному направлению азимута прочность материала соответствует минимальному значению прочности на одной из поверхностей ослабления, а искомая общая огибающая минимальных значений прочности будет соответствовать предельной прочности материала, когда он нагружается максимальным нормальным напряжением  $\sigma_1$  при заданных значениях остальных (боковых) напряжений  $\sigma_2$ ;  $\sigma_3$ .

Более наглядными и понятными являются графики изменения прочности материала при их представлении в виде полярной диаграммы прочности. На рис. 3.11 приведена такая диаграмма прочности, полностью соответствующая диаграмме рис. 3.10. На рис. 3.10 приведена диаграмма прочности  $\sigma_1(\theta)$  массива с тремя поверхностями ослабления с ориентацией: 1 –  $\varphi_1=15^\circ$ ,  $\theta_1=15^\circ$ ; 2 –  $\varphi_2=30^\circ$ ,  $\theta_2=30^\circ$ ; 3 –  $\varphi_3=45^\circ$ ,  $\theta_3=45^\circ$ , а на рис. 3.11 – те же графики на полярной диаграмме

На рис. 3.12 – 3.13 можно проследить за изменением прочности массива горных пород с тремя поверхностями ослабления под углами  $\varphi_1=15^\circ$ ;  $\theta_1=15^\circ$ ;  $\varphi_2=30^\circ$ ;  $\theta_2=30^\circ$ ;  $\varphi_3=45^\circ$ ;  $\theta_3=45^\circ$ ; в зависимости от поворота их азимута ориентировки относительно заданного направления.

Для сравнения изучим по графикам рис. 3.14, как изменяется предел прочности массива горных пород на одноосное сжатие при тех же поверхностях ослабления, что и принятые для предыдущих рисунков, т.е. когда  $\sigma_2=\sigma_3=0$ .

Графики прочности массива горных пород на каждой из поверхностей ослабления в отдельности и для массива в целом могут претерпевать значительные изменения в зависимости от соотношения заданных боковых напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . На рис. 3.15 приведен демонстрационный пример такого изменения предела прочности массива на одноосное сжатие  $\sigma_1(\theta)$ , когда промежуточная компонента напряжения становится не равной нулю ( $\sigma_2=20$  МПа). На графиках рисунков 3.12, 3.13 показана зависимость прочности  $\sigma_1(\varphi)$  при тех же параметрах внешней

нагрузки и прочностных характеристиках поверхностей ослаблений. По рис. 3.14 можно проследить зависимость  $\sigma_1(\theta)$  прочности массива на одноосное сжатие от наклона плоскостей ослабления (угла их падения).

Как можно судить из сравнения графиков, предел прочности массива горных пород на одноосное сжатие резко изменяется в зависимости от ориентации в пространстве поверхностей ослабления по сравнению с прочностью образца. Тем самым на этих примерах можно убедиться в том, что принятая в настоящее время расчетная практика учета снижения прочности массива только по коэффициенту структурного ослабления неприемлема и должна быть заменена более обоснованными подходами, которые предлагаются в данной работе.

Из сравнения рисунков 3.10 - 3.15 видно, что даже незначительное изменение минимального главного напряжения приводит к существенному изменению прочности материала.

Весь этот комплект рисунков призван наглядную отразить те достаточно сложные закономерности, которые описывают изменение прочности массива, содержащего различные плоскости ослабления. Результирующая прочность такого структурно неоднородного массива показана жирной линией, она занимает самое нижнее положение прочности по всем структурным ослаблениям. Исходя из анализа графиков, можно судить о том, как важно тщательно изучать строение массива. С другой стороны, если нет достаточно представительных данных о прочности массива, можно приближенно оценивать его прочность по минимальной границе самой слабой поверхности ослабления, что, безусловно, будет вести к запасу надежности при принятии решений в процессе ведения горноинженерных работ.

Анализ рассмотренных случаев побуждает задать важный вопрос, – к каким последствиям может привести такие сложные и неожиданные изменения прочности структурно неоднородных массивов? И вывод оказывается весьма настораживающим – это приведет к достаточно опасным состояниям массива, когда он может даже под действием гравитационных сил переходить в предельное состояние по одному из направлений, сохраняя прочность на некоторых других.

Переход структурно-неоднородного массива в предельное напряженное состояние способно создать зоны высоких концентраций напряжений, представляющих большую опасность с точки зрения проявлений горного давления, горных ударов, внезапных выбросов угля и га

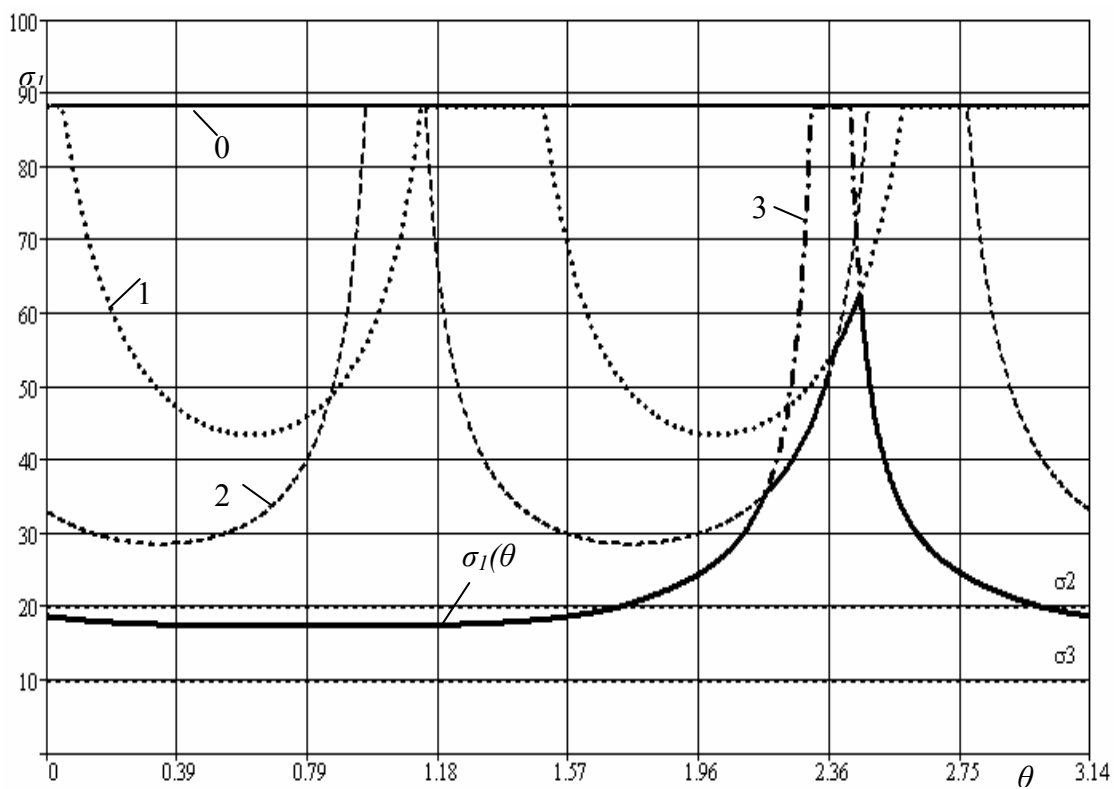


Рис. 3.10 - Диаграмма прочности  $\sigma_I(\theta)$  массива с тремя поверхностями ослабления

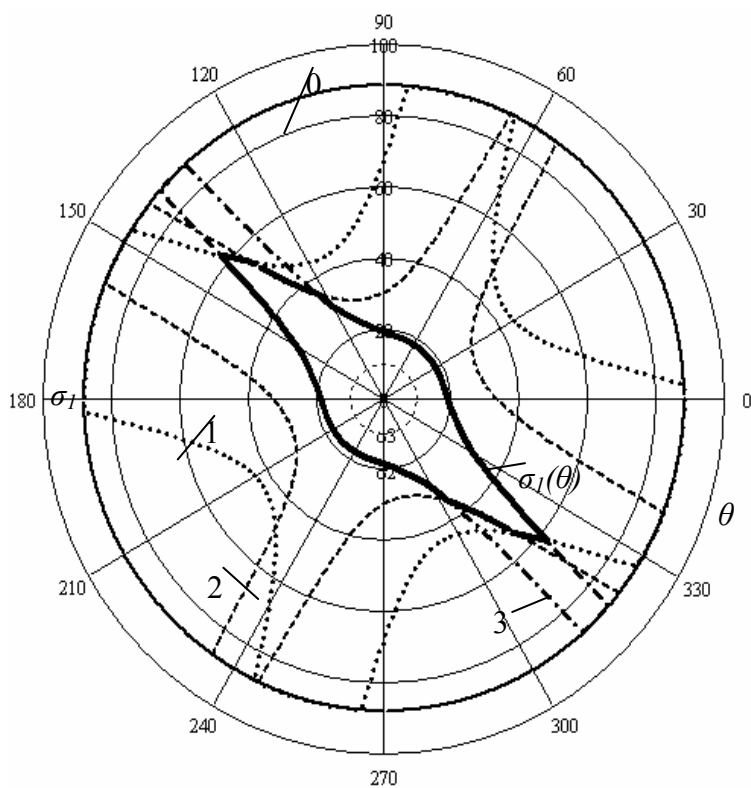


Рис. 3.11 – Полярная диаграмма прочности  $\sigma_I(\theta)$ , соответствующая данным рис. 3.10

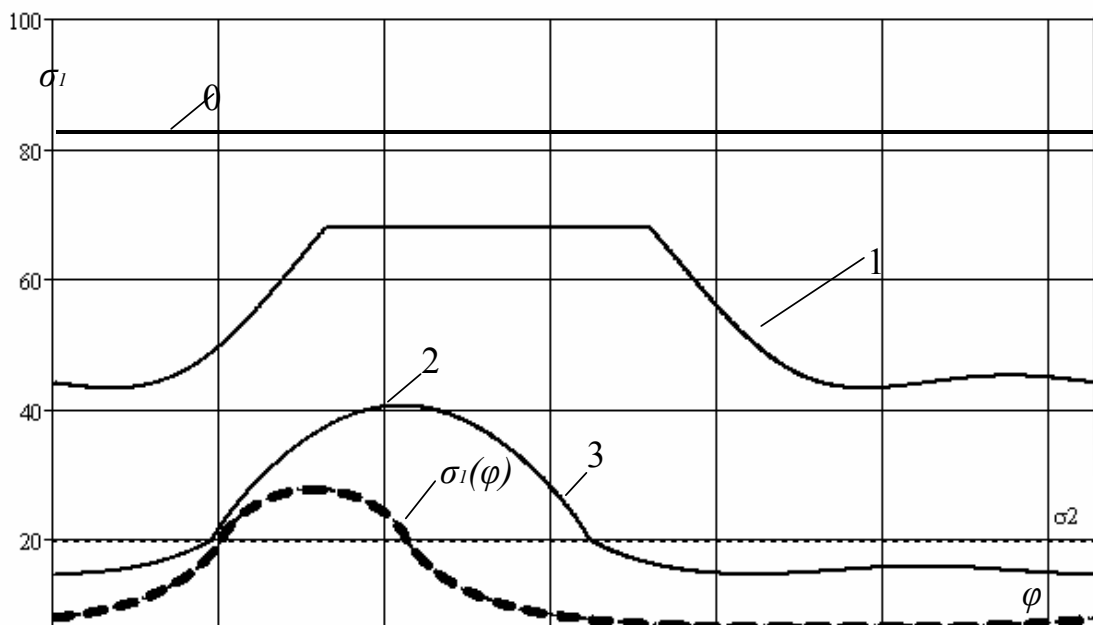


Рис. 3.12 – Диаграмма прочности массива с тремя поверхностями ослабления

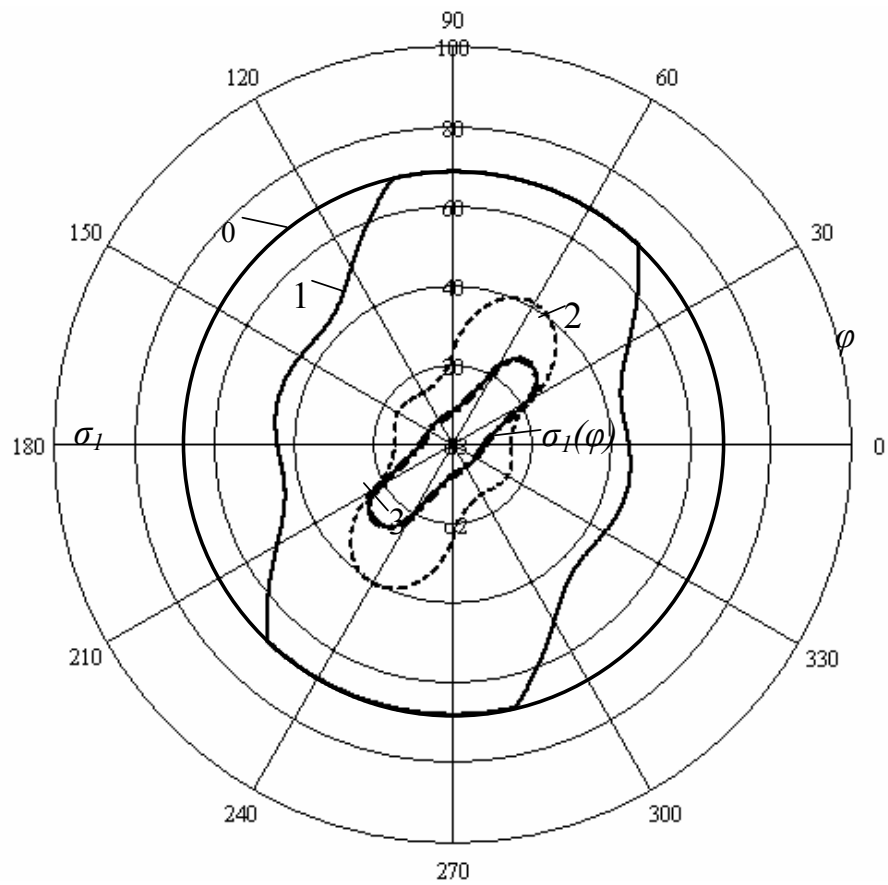
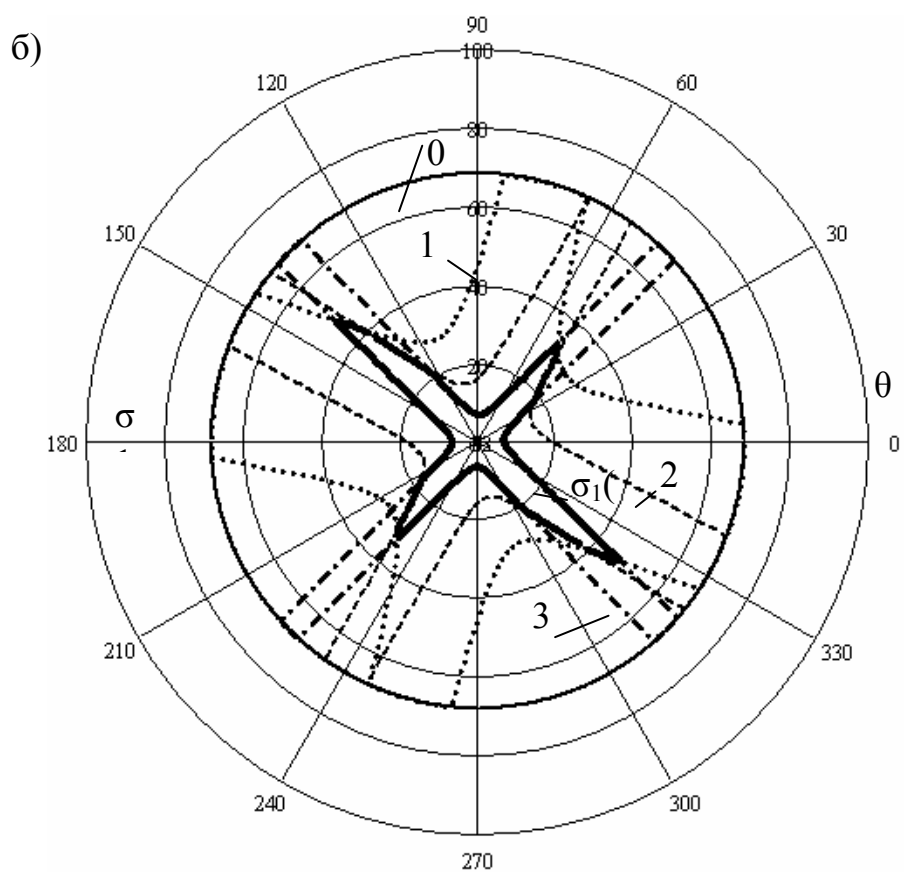
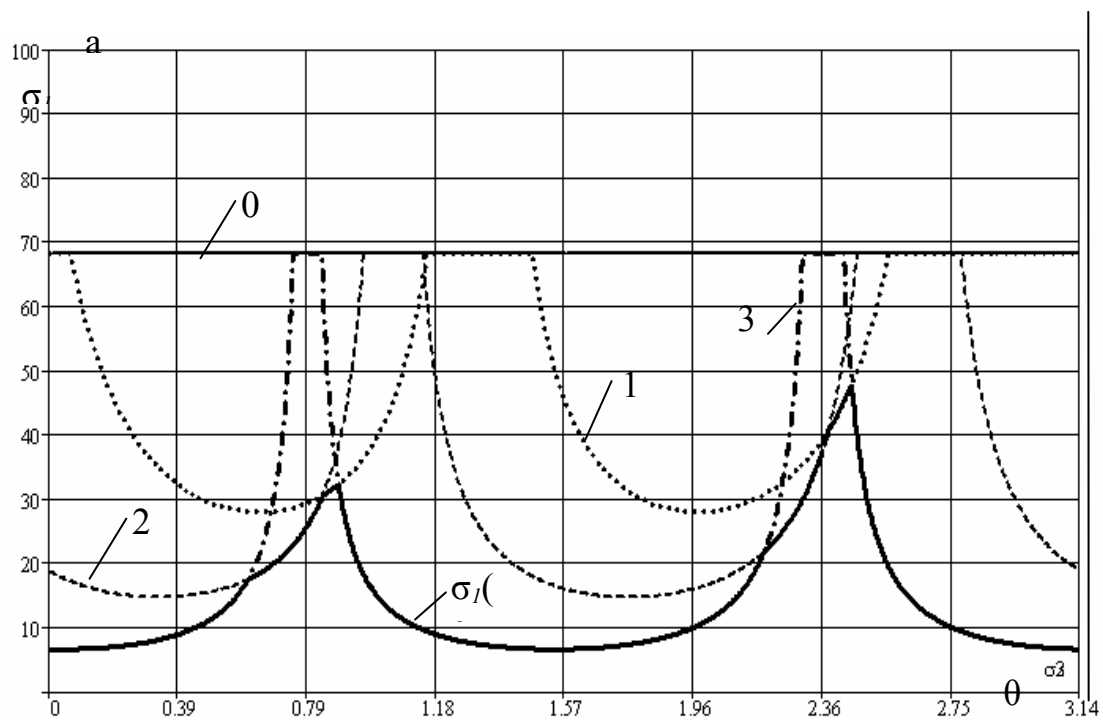


Рис. 3.13 - Полярная диаграмма  $\sigma_I(\varphi)$  прочности по рис. 3.12



а) обычная система координат; б) полярная диаграмма

Рис. 3.14 – Зависимость  $\sigma_1(\theta)$  прочности массива на одноосное сжатие от наклона плоскостей ослабления

за, способствовать образованию пространственных «ловушек» и «карманов» для газов и жидкостей, особенно в условиях больших глубин при наличии в массиве технологических нарушений, которые повсеместно происходят при ведении горных работ.

Достаточно наглядно изменение прочности массива представляет пространственный график изменения прочности в зависимости от азимута простирания и угла падения поверхностей ослабления (рис. 3.15).

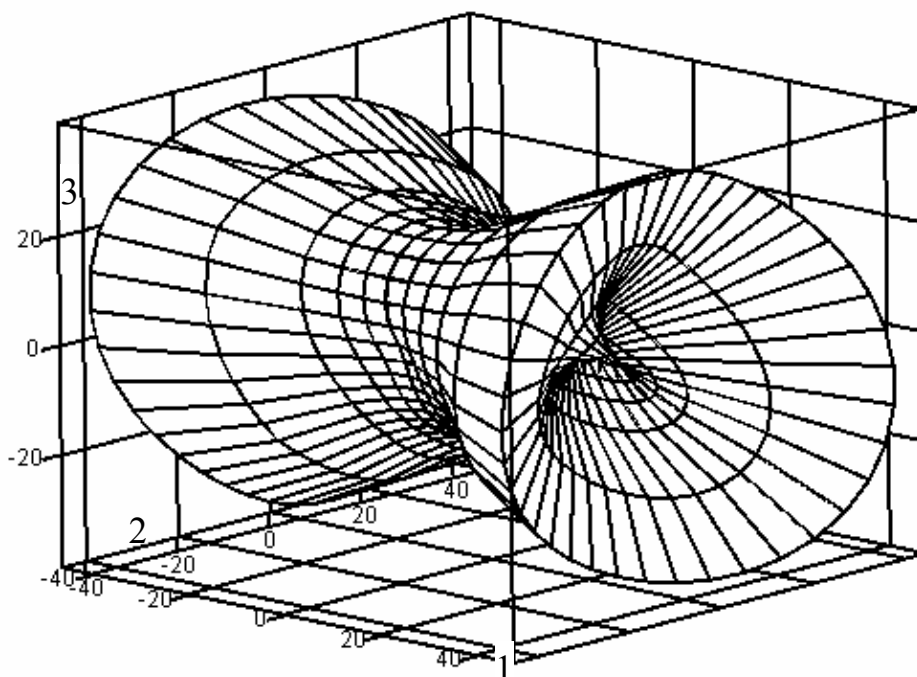


Рис. 3.15 – Пространственный график прочности массива на объемное сжатие при изменении угла падения и азимута простирания системы трещин ( $\sigma_2 = 20$ ;  $\sigma_3 = 10$  МПа)

Рассмотрим, как изменяется прочность массива в зависимости от изменения промежуточной компоненты напряжений  $\sigma_2$  при одной и той же системе поверхностей ослабления. Эта проблема нами была затронута и ранее, при анализе прочности массива, содержащего трещины. На рис. 3.16 приведена поверхность предела прочности массива на одноосное сжатие при изменении угла падения и азимута простирания системы трещин.

На рис. 3.17 и 3.18 показано, как изменяется поверхность предела прочности того же массива для случаев, когда промежуточная ком-

понента напряжений увеличивается и становится равной  $\sigma_2 = 20$  и  $\sigma_2 = 40$  МПа соответственно при  $\sigma_3 = 0$ .

Из сравнения поверхностей предела прочности массива горных пород при разных уровнях напряжений  $\sigma_2$  мы можем сделать вывод о появлении больших различий в значениях прочности и форме ее поверхности.

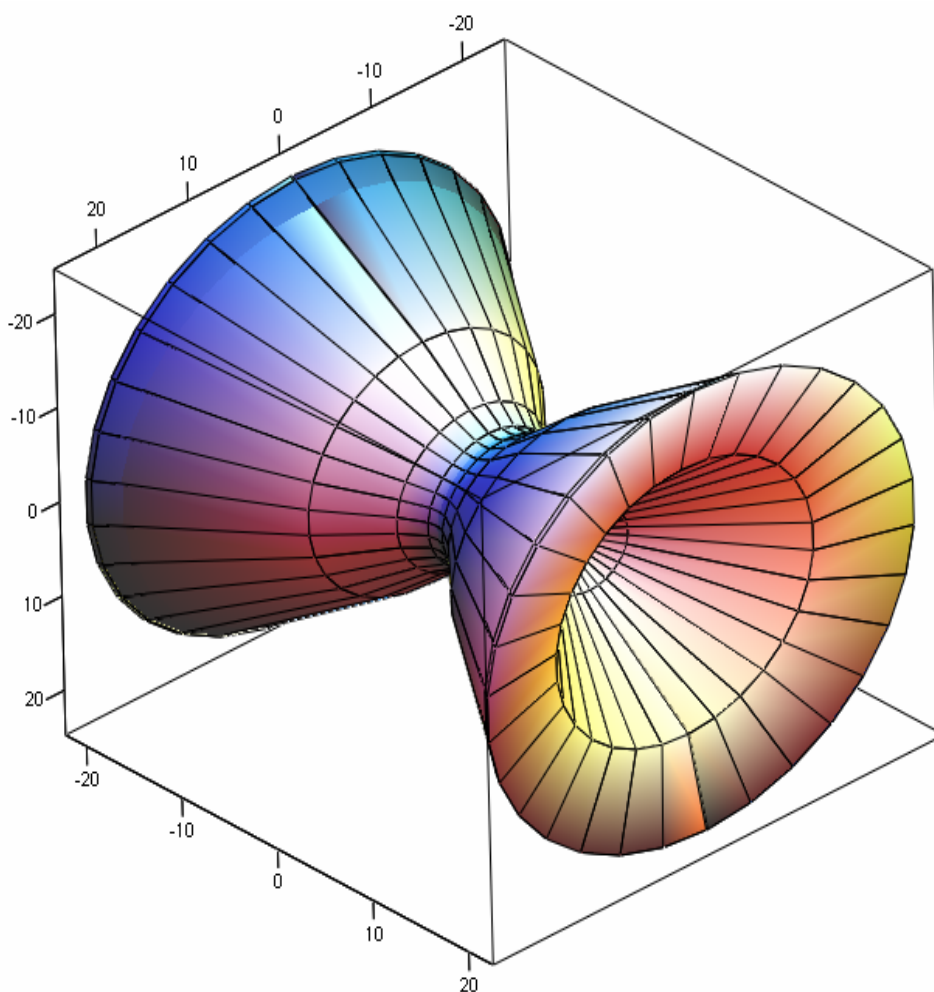


Рис. 3.16 – Пространственный график прочности массива на одноосное сжатие ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) при изменении угла падения и азимута простирания системы трещин. Направления 1, 2 и 3 совпадают с главными напряжениями

Это с полной определенностью позволяет утверждать, что промежуточная компонента тензора напряжений в материалах *сложной* и *неоднородной* структуры весьма существенно влияет на особенности пространственного распределения прочности. Это, с другой стороны,

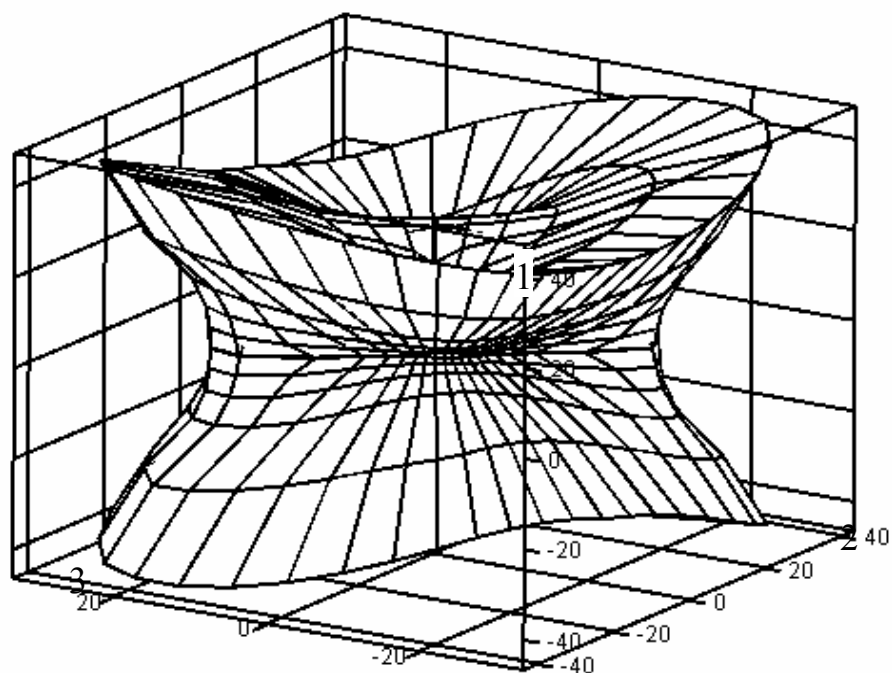


Рис. 3.17 – Пространственный график прочности массива на  
объемное сжатие ( $\sigma_2=20$  МПа;  $\sigma_3=0$ )

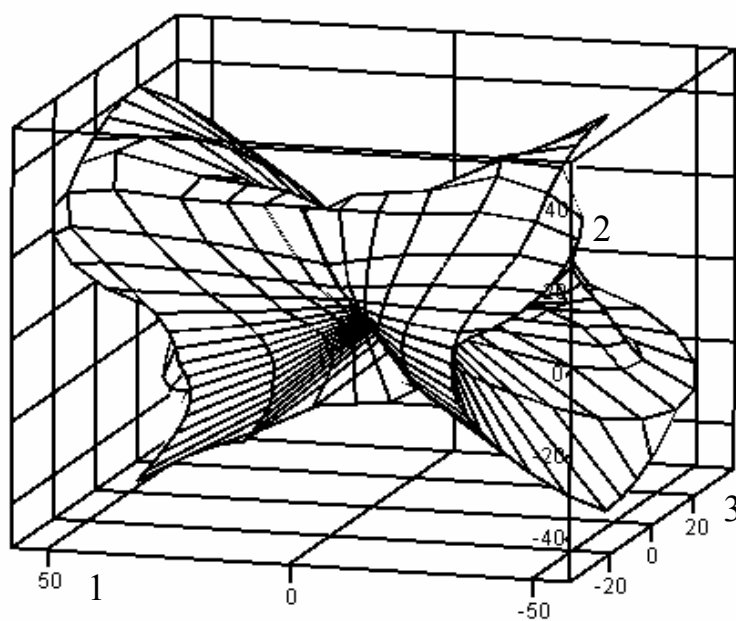


Рис. 3.18 – Пространственный график прочности массива на  
объемное сжатие ( $\sigma_2=40$  МПа;  $\sigma_3=0$ )



позволяет дать вразумительное объяснение неоднократно получаемым экспериментальным данным, показывающим влияние промежуточного напряжения  $\sigma_2$  на показатели прочности материалов. По всей видимости, такие экспериментальные данные были получены для неоднородных или анизотропных материалов, на что не всегда обращали внимание исследователи.

Полученный нами вывод и обнаруженный эффект влияния  $\sigma_2$  на прочность материалов в случае их неоднородной структуры еще раз подтверждает правильность исходной концепции, принятой в аналитической теории прочности, а также ранее в теориях прочности Кулона-Мора, Треска, Шашенко и др. о независимости условия прочности на произвольной площадке разрушения от промежуточной компоненты тензора напряжений  $\sigma_2$ .

Отметим, что хотя в основу аналитической теории прочности положен обоснованный нами постулат о независимости поверхности прочности однородного материала от промежуточной компоненты, тем не менее, эта же аналитическая теория прочности позволила обнаружить чрезвычайно важный феномен, доказывающий обратное утверждение для массивов сложного структурного строения. Из проведенного исследования можно обоснованно судить о причинах изменения прочности в зависимости от промежуточной компоненты напряжений  $\sigma_2$  и оценить эти изменения количественно.

#### ***3.1.4.2 Прочность массива при нагружении по схеме Беккера***

Рассмотрим прочность массива горных пород, который находится в объемном напряженном состоянии  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Однако в предельное состояние данный массив переходит не в процессе возрастания максимального главного напряжения  $\sigma_1$ , а при разгрузке, путем снижения минимального главного напряжения  $\sigma_3$ . Таким образом, мы рассмотрим обобщение схемы нагружения по Беккеру, поскольку ранее в такой схеме нагружения материалов рассматривается частный случай  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ .

Изучение предельных состояний массива в процессе снижения одного или двух минимальных напряжений представляет особый интерес при ведении горных работ открытым и, особенно, подземным способом. Именно такие случаи нагружения сопровождают горные работы по выемке больших породных масс при вскрыше месторождений или добыче полезных ископаемых подземным способом. Однако до настоя-

щего времени проблема оценки несущей способности массива в такой постановке не ставилась.

Таким образом, задача определения несущей способности материала формулируется в следующей постановке: найти такое максимальное значение минимальной компоненты тензора напряжений при заданном уровне двух других компонент  $\sigma_2$  и  $\sigma_1$ , когда материал переходит в предельное напряженное состояние. Решение этой задачи удобно производить, вначале полагая  $\sigma_3 = \sigma_2$ , а затем, постепенно уменьшая  $\sigma_3$  до тех пор, пока материал не окажется в предельном состоянии. На рис. 3.19 показан ход решения задачи такого типа в виде последовательности кругов напряжений диаграммы Мора, когда напряжение  $\sigma_3$  постепенно снижается вплоть до предельного значения.

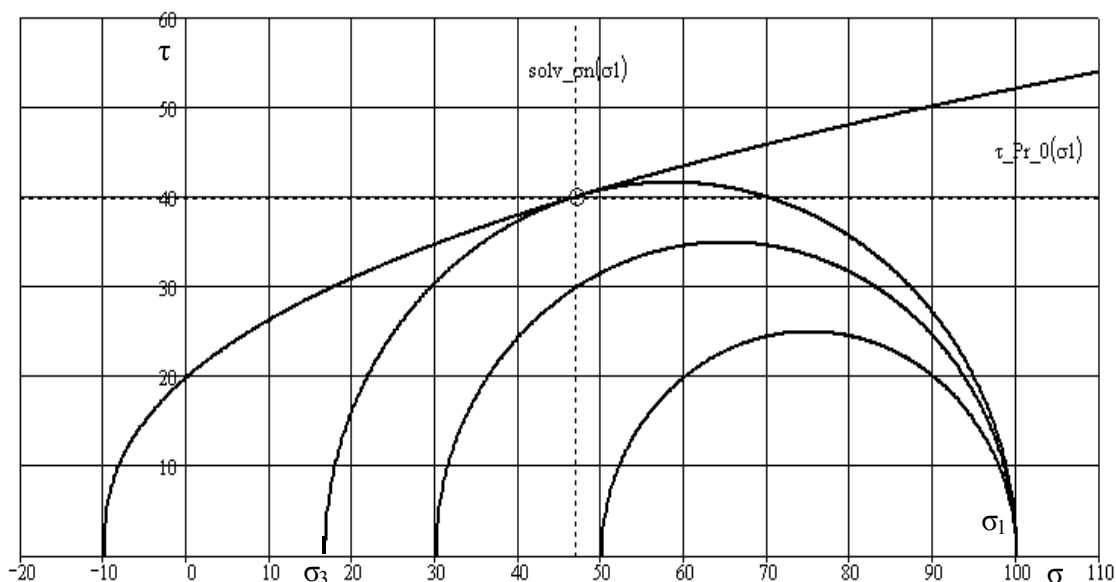


Рис. 3.19 – Определение предельного значения минимального главного напряжения на диаграмме О. Мора

Зададим массив горных пород, который содержит три взаимно перпендикулярных поверхности ослабления. Каждая поверхность ослабления характеризуется набором прочностных показателей и углами падения и азимутом простирания, как это и делалось при исследовании схемы нагружения Кармана в п.3.1.4.1. Азимут изменяется в пределах  $0 < \varphi < 2\pi$ , а угол падения  $0 < \theta < \pi/2$  относительно ориентировки главных напряжений. Напряжение  $\sigma_1$  совпадает с осью  $z$ , а азимут простирания  $\varphi$  – это угол между линией простирания плоскости ослабления и вторым

главным напряжением  $\sigma_2$  (считается условно направленным на «Север»). Угол падения  $\theta$  - это угол между первым главным напряжением  $\sigma_1$  и нормалью к плоскости ослабления.

Введем исходные прочностные параметры для однородного массива и трех плоскостей ослабления в виде матрицы, где 1-я строка - параметры прочности исходного материала без трещин, а остальные строки - параметры прочности каждой по очереди трещины:

$$\text{strength} := \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0.4 \\ 10 & 6 & 0.3 \\ 6 & 4 & 0.2 \\ 3 & 2 & 0.1 \end{pmatrix} \quad \tau_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Уравнения прочности и угла внутреннего трения для каждого из структурных объектов, отраженных в матрице (3.24), записываем в общем виде как индексированные функции заданных параметров  $i$ , и  $\sigma_n$  – нормальное напряжение на площадке разрушения:

$$\tau(i, \sigma_n) := \tau_{0i} \cdot \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_{0i}} + 1 \right)^{\alpha_i} \quad f(i, \sigma_n) := \alpha_i \cdot \frac{\tau_{0i}}{\sigma_{0i}} \cdot \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_{0i}} + 1 \right)^{\alpha_i - 1} \quad (3.25)$$

Введем вспомогательную функцию прочности однородного материала  $i=0$  для определения прочности  $\tau_{Pr\_0}(\sigma_3)$  по заданному значению  $\sigma_1$ :

$$fl(\sigma_n, \sigma_1) := \sigma_1 - \sigma_n - \tau(0, \sigma_n) \cdot \left( \sqrt{1 + f(0, \sigma_n)^2} + f(0, \sigma_n) \right) \quad (3.26)$$

Для этого используем решающий блок `root`, обозначив искомую переменную через  $z$ :

$$\begin{aligned} \text{solv\_}\sigma_n(\sigma_1) &:= \text{root}(fl(z, \sigma_1), z) \\ \tau_{Pr\_0}(\sigma_1) &:= \tau(0, \text{solv\_}\sigma_n(\sigma_1)) \end{aligned}$$

По заданному  $\sigma_1$  определяем  $\sigma_3(\sigma_1)$  для однородного материала соответствующего исходным значениям  $\sigma_1$  и вычисленной прочности  $\tau_{Pr_0}$

$$\sigma_3(\sigma_1) := \text{solv\_sn}(\sigma_1) - \tau(0, \text{solv\_sn}(\sigma_1)) \cdot \left( \sqrt{1 + f(0, \text{solv\_sn}(\sigma_1))^2} - f(0, \text{solv\_sn}(\sigma_1)) \right)$$

Теперь то же самое выполним для всех плоскостей ослабления, причем три плоскости ослабления расположим перпендикулярно друг другу, как это часто и встречается для систем трещин в реальном массиве. Углы для плоскостей ослабления выберем в качестве примера следующими:

$$\begin{aligned} \phi_0 &:= \frac{\pi}{180} \cdot 0 & \phi_1 &:= \frac{\pi}{180} \cdot 0 & \phi_2 &:= \frac{\pi}{180} \cdot 0 & \phi_3 &:= \frac{\pi}{180} \cdot 90 \\ \theta_0 &:= \frac{\pi}{180} \cdot 0 & \theta_1 &:= \frac{\pi}{180} \cdot 45 & \theta_2 &:= \frac{\pi}{180} \cdot 135 & \theta_3 &:= \frac{\pi}{180} \cdot 135 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Напряжения на  $i$ -той плоскости ослабления,  $i=1 \dots N$  (у нас в качестве примера выбрано три плоскости, хотя программа позволяет решать задачу для произвольного счетного числа плоскостей  $N$ ) можно определить по формуле:

$$\sigma_n(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \cos(\Theta + \theta_i)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) \cdot (\sin(\Phi + \phi_i) \cdot \sin(\Theta + \theta_i))^2 + \sigma_3 \quad (3.28)$$

где  $\Phi$  и  $\Theta$  - текущие углы поворота плоскостей ослабления для построения графиков.

По той же формуле, что и в предыдущем пункте, определяем касательное напряжение на площадке разрушения  $\tau_n(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

Уравнение прочности на  $i$ -той плоскости ослабления выражается зависимостями, подобными (3.25)

$$\tau(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := \tau_{0i} \cdot \left( \frac{\sigma_n(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\sigma_{0i}} + 1 \right)^{\alpha_i}, \quad (3.29)$$

где  $i=0 \dots 3$ .

Введем вспомогательную функцию прочности на  $i$ -той плоскости ослабления, равную нулю, когда касательные напряжения на  $i$  плоскости ослабления равны прочности

$$Y_{-1}(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := |\tau_n(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)| - \tau(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (3.28)$$

Вводим условие (if) выполнения прочности по схеме нагружения Беккера, когда вначале мы определяем наименьшее напряжение  $\sigma_3$ , при котором произойдет разрушение. Однако если  $\sigma_3$  окажется больше, чем  $\sigma_2$ , тогда следует принять, что  $\sigma_2 = \sigma_3$  и искать их значение совместно (нагружение не по обобщенной, а классической схеме Беккера  $\sigma_2 = \sigma_3$ ).

$$Y_{-11}(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := \text{if}(\sigma_3 > \sigma_2, Y_{-1}(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_3), Y_{-1}(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)) \quad (3.30)$$

Чтобы определить искомое значение  $\sigma_3$ , следует правильно задать интервал поиска решения по предыдущему уравнению (3.30). Для этого исходим из следующих соображений:

а) минимальное значение  $\sigma_3$  должно быть не менее  $-\sigma_0$ , а максимальное не должно превышать  $\sigma_1$ ;

б) чтобы решение существовало, функция  $Y_{-11}$  должна менять знак на этом интервале, что, и записано в условии оператора присвоения (3.30);

в) если это условие не выполняется, то решение должно принимать значение минимума на интервале поиска функции, т.е.  $-\sigma_0$ .

Согласно схеме нагружения Беккера, предельным значением прочности будет случай, когда касательное напряжение на плоскостях ослабления  $\tau_n(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  будет минимальным. А это происходит при максимальном значении разности  $\sigma_1 - \sigma_3$ . Поскольку  $\sigma_1$  задано постоянным, то для выполнения условия необходимо рассматривать случаи, когда  $\sigma_3$  достигает минимума.

$$\sigma_3(i, \Phi, \Theta, \sigma_2, \sigma_3) := \min \left( \begin{array}{c} \sigma_{-3}(\sigma_1) \\ S\sigma_{-3}(i, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2) \end{array} \right) \quad (3.31)$$

Вычисление прочности материала со всеми плоскостями ослабления следует производить по алгоритму

$$S_{\sigma 3}(\Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2) := \min \begin{pmatrix} S_{\sigma 3}(1, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2) \\ S_{\sigma 3}(2, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2) \\ S_{\sigma 3}(3, \Phi, \Theta, \sigma_1, \sigma_2) \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

На рис. 3.20 показано изменение пределов прочности массива горных пород  $\sigma_3(\theta)$  для 1, 2 и 3 плоскостей ослабления от угла падения плоскостей ослабления для разных направлений азимутов их простирания относительно главных осей напряжений, определенных по формулам (3.31) и (3.32). Как видно из графиков, прочность претерпевает существенные изменения при изменении угла падения поверхностей ослабления. Чтобы получить представление о влиянии плоскостей ослабления на прочность породы при изменении азимута простирания, следует проанализировать графики на рис. 3.21.

Более наглядными графики изменения прочности по углу падения и азимуту простирания становятся на полярных диаграммах, которые показаны на рис. 3.22. Достаточно наглядную картину изменения прочности можно получить при рассмотрении полярных диаграмм изменения прочности породы при изменении азимута простирания плоскостей ослабления показанные на рис. 3.22.

Если построить пространственную поверхность изменения пределов прочности при одновременном изменении угла падения и азимута простирания, то получим полную картину влияния этих параметров, представленную на рис. 3.23 - внешняя сторона рассеченной надвое поверхности прочности внизу и та же поверхность, но вид изнутри рассеченной части (вверху).

## 3.2 ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ КУСОЧНО НЕОДНОРОДНЫХ ПОРОД И МАССИВОВ

### 3.2.1 Теория прочности микронеоднородных материалов

При попытке описать механические свойства горных пород возникает проблема учета их структурного строения, поскольку большинство горных пород не являются однородными, а состоят из комплекса минералов. В особенности это касается кристаллических и обломочных горных пород, которые составляют подавляющее большинство среди существующих генотипов.

Рассмотрим нетривиальную проблему определения критерия прочности для микрозернистой горной породы, состоящей из различных минералов, обладающих различными механическими свойствами. Такая постановка задачи была бы невозможной в рамках традиционных теорий прочности из-за своей сложности и отсутствия должного теоретического обоснования. Однако в рамках предлагаемой здесь аналитической теории прочности эта проблема органично вытекает из особенностей описания сопротивления разрушению на площадке сдвига.

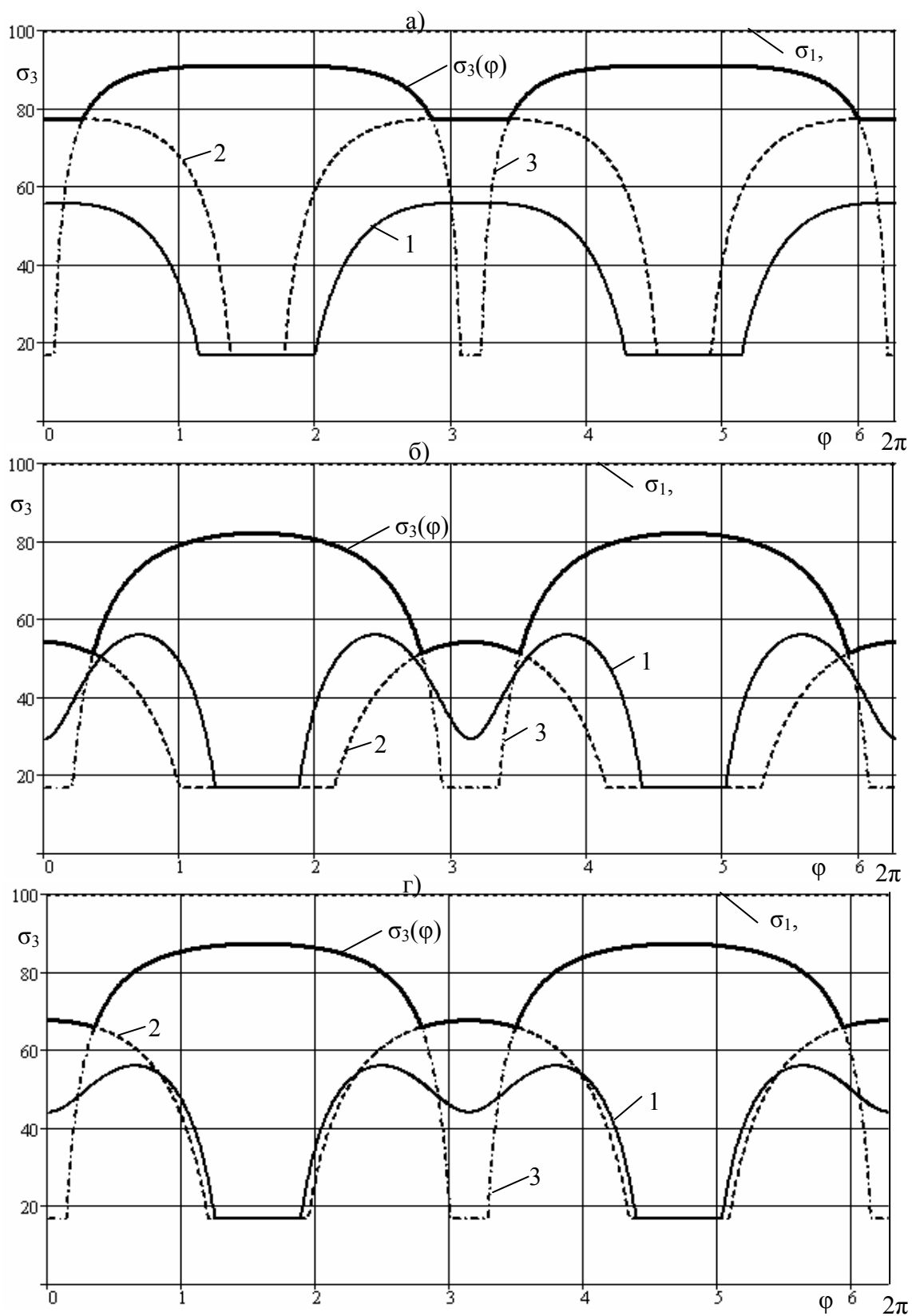


Рис. 3.20 – Графики изменение пределов прочности  $\sigma_3(\theta)$  для 1, 2 и 3 плоскостей ослабления при разных углах падения



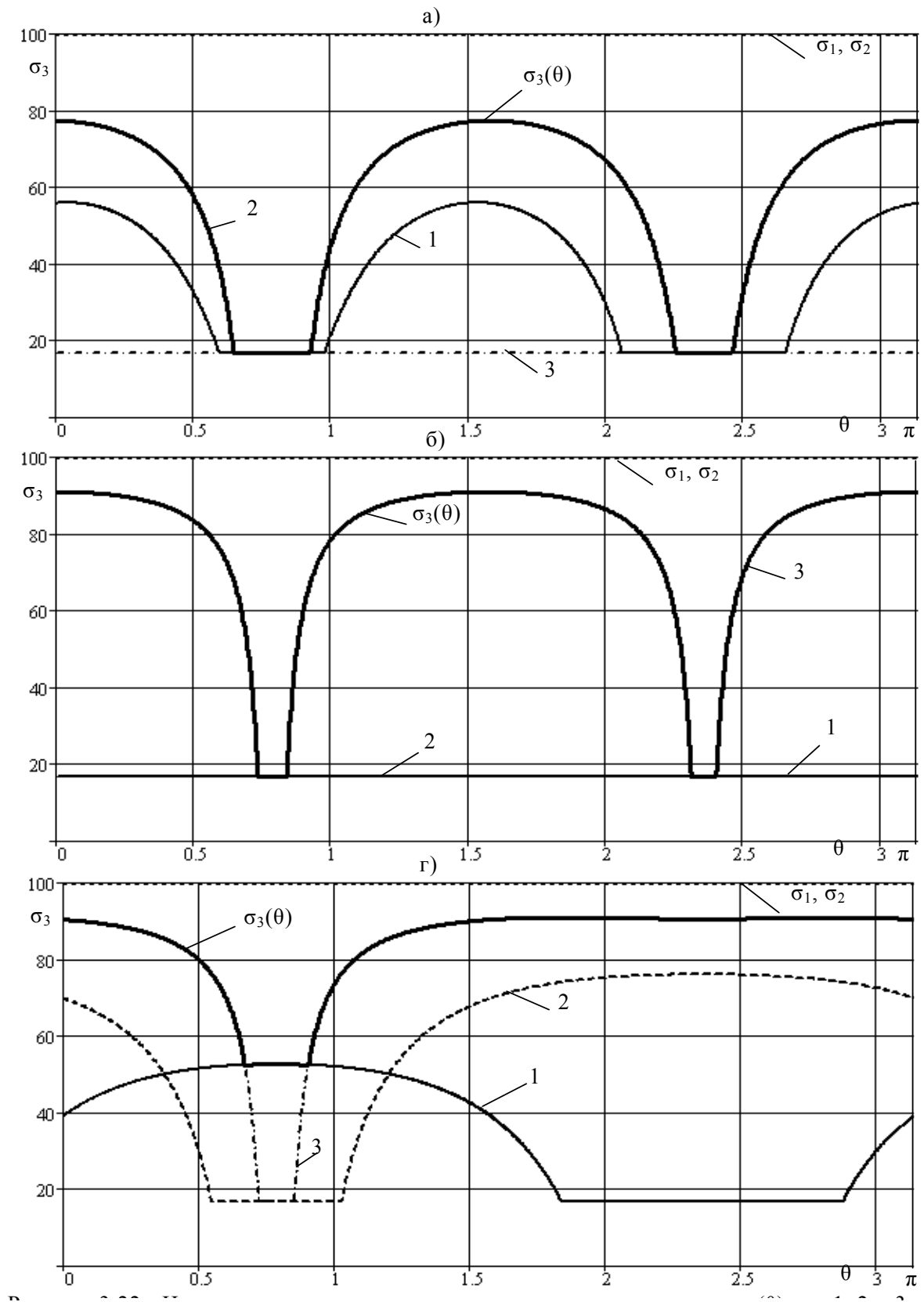
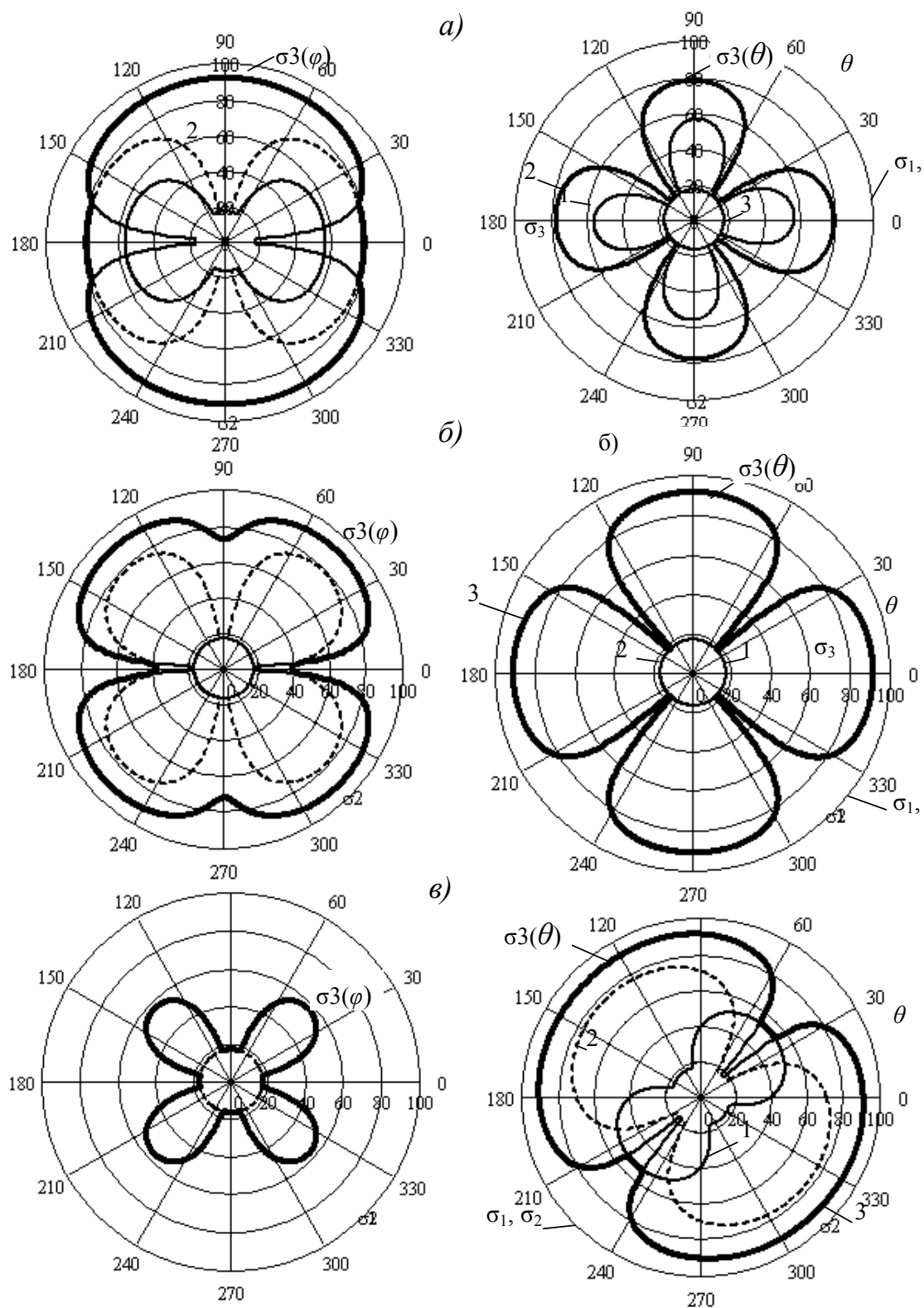


Рис.3.21 - Изменение пределов прочности массива горных пород  $\sigma_3(\theta)$  для 1, 2 и 3 плоскостей ослабления при разных углах падения, когда заданы напряжения  $\sigma_1=100$  и  $\sigma_2=100$  МПа



а)  $\varphi, \theta = 0$ ; б)  $\varphi, \theta = \pi/2$ ; в)  $\varphi, \theta = 0,7\pi$

Рис. 3.22 - Изменение пределов прочности массива при разных направлениях азимутов простираения  $\sigma_3(\varphi)$  (слева) и углов падения  $\sigma_3(\theta)$  (справа) ослаблений, при  $\sigma_1=100$  и  $\sigma_2=100$  МПа

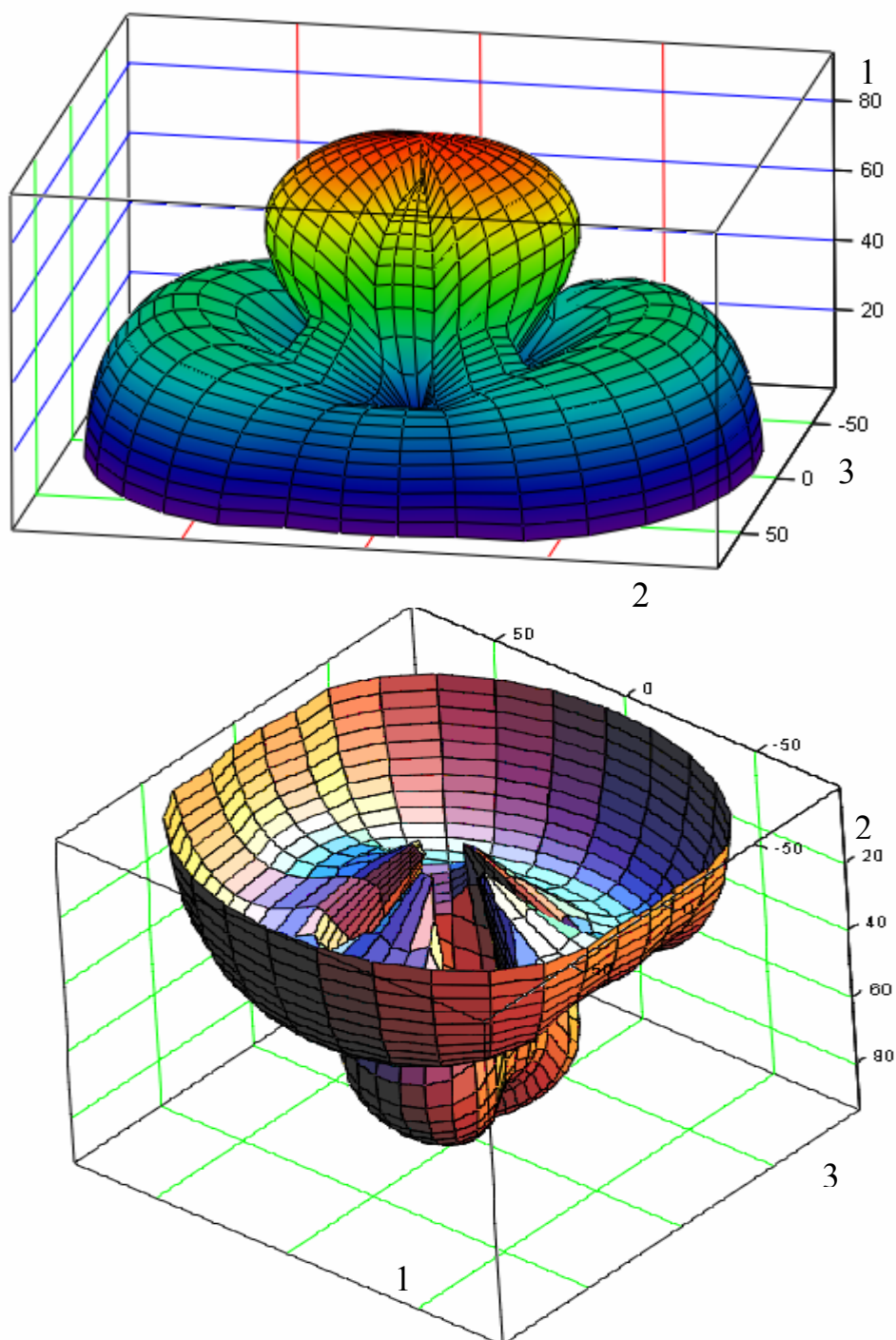


Рис. 3.23 - Поверхности изменения прочности массива  $\sigma_3$  от угла падения и азимутов простирания плоскостей ослабления, при  $\sigma_1=\sigma_2=100$  МПа (поверхность рассечена по плоскости симметрии пополам, вид снаружи и изнутри)

Пусть путем минералогических и петрографических исследований установлена структура, строение и минералогический состав кон-

кретной горной породы. Кроме того, известны все необходимые механические свойства (упругие, деформационные и прочностные) слагающих породу минералов.

Следовательно, исходными данными будут механические свойства каждого  $i$ -того ( $0 \leq i \leq n$ ) минерала  $\alpha_i; \sigma_{0i}; \tau_{0i}; E_i; G_i; \psi_i$ , где дополнительно необходимо знать модули Юнга и сдвига  $E_i; G_i$  для учета неоднородности распределения напряжений на минералах с разными деформационными свойствами. Здесь обозначена удельная площадь, занимаемая минералом (зерном) с индексом  $i$  через  $\psi_i$ , причем всего имеется  $n$  минералов на площадке сдвига ( $0 \leq i \leq n$ ).

Введем оператор средневзвешенного усреднения любого показателя свойств зерна (минерала)  $a_i$  по всей площади, по которой происходит сдвиг породы, с весом  $\psi_i$ :

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i. \quad (3.33)$$

Тогда нормальные и касательные напряжения на минерале  $i$  в микронеоднородном материале с учетом (3.33) будут равны:

$$\sigma_i = \sigma_n E_i / \bar{E} = \sigma_n e_i; \quad \tau_i = \tau_{nt} G_i / \bar{G} = \tau_{nt} g_i, \quad (3.34)$$

где  $e_i = E_i / \bar{E}$  и  $g_i = G_i / \bar{G}$  - соответственно относительные продольная и сдвиговая жесткости каждого  $i$ -того входящего в породу минерала.

Для построения аналитического уравнения прочности микронеоднородного тела необходимо воспользоваться концепцией аналитической теории прочности, согласно которой на каждом из минералов на площадке разрушения коэффициент трения должен быть равен:

$$\frac{d\tau_i}{d\sigma_{ni}} = \frac{\alpha_i \tau_i}{\sigma_{ni} + \sigma_{0i}}. \quad (3.35)$$

Запишем дифференциальное уравнение прочности микронеоднородного материала, проведя усреднения всех коэффициентов трения на площадке разрушения на основании соотношений, полученных в разделе 2 и введенных выше обозначений:

$$\frac{d\tau_{nt}}{d\sigma_n} = \sum_{i=1}^n \frac{d\tau_i}{d\sigma_{ni}} \psi_i = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \tau_i \psi_i}{\sigma_{ni} + \sigma_{0i}} . \quad (3.36)$$

Учтем соотношения (3.34) и подставим их в (3.36)

$$\frac{d\tau_{nt}}{d\sigma_n} = \tau_{nt} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i g_i \psi_i}{\sigma_n e_i + \sigma_{0i}} . \quad (3.37)$$

В этом дифференциальном уравнении прочности в свернутом виде записана весьма простая механическая модель разрушения, а именно: результирующее значение коэффициента трения на площадке разрушения равно средневзвешенному по всем коэффициентам трения на площадках разрушения каждого слагающего породе минерала с весом  $\psi_i$ .

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (3.37) первого порядка с разделяющимися переменными при подстановке граничного условия для значения усредненной когезии сдвига  $\tau_0$  с весом  $\psi_i$  по каждому индивидуальному значению когезии сдвига на любой площадке с индексом  $i$   $\tau_{nt} = \tau_0 = \sum_{i=1}^n \tau_{0i} \psi_i$  при  $\sigma_n = 0$ , дает критерий прочности зернистой породы в виде уравнения обобщенной огибающей диаграммы О. Мора:

$$\tau_{nt} = \tau_0 \prod_{i=1}^n \left( \frac{\sigma_n e_i}{\sigma_{0i}} + 1 \right)^{\beta_i} , \quad (3.38)$$

где для упрощения записи введено обозначение обобщенного показателя хрупкости

$$\beta_i = \frac{\alpha_i \psi_i g_i}{e_i} \quad (3.39)$$

Нетрудно убедиться, что в предельных случаях уравнение (3.38) переходит в более простые свои модификации, полученные в предыду-

щих разделах. Полезно обратить внимание на то, что приведенные относительные жесткости  $i$ -компонента  $e_i; g_i$  по-разному влияют на его вклад в прочность. При увеличении сдвиговой жесткости повышается хрупкость компонента, а при увеличении продольной приведенной жесткости улучшаются пластические свойства зерна, поскольку обобщенный параметр хрупкости  $\beta_i$  уменьшается.

Разумеется, предложенный подход позволяет оценить параметры прочности лишь сугубо приближенно, поскольку для того, чтобы формулы (3.38) давали правильный результат, необходимо, чтобы все компоненты материала достигли предельного состояния при разрушении одновременно, что, вообще говоря, маловероятно. Если это предположение не соблюдается, то необходимо формулировать дополнительные условия прочности, например, потребовать соблюдения менее жесткого условия – при достижении каким либо компонентом предельного состояния, он после разрушения должен оставаться на достигнутом уровне напряжений, соответствующем его паспорту прочности при пластическом поведении или переходить в запредельное состояние при проявлении хрупкости.

В общем случае следует полагать, что по мере нагружения микронеоднородного материала любой из его компонентов обладает собственным напряженным состоянием, обусловленным ему свойственными упругими характеристиками. Отсюда следует, что каждый из минералов будет совершать переход в предельное состояние индивидуально. Для такого микронеоднородного материала оценка прочностных свойств должна производиться путем рассмотрения поочередного разрушения слагающих его минералов, которые по очереди будут переходить в предельное состояние на ниспадающую ветвь диаграммы нагружения.

Таким образом, предлагаемое теоретическое решение можно расценивать, как первое приближение по оценке паспорта прочности микронеоднородного материала. Эту оценку можно уточнять, используя различные модели поведения компонент материала после достижения ими предела прочности (сохранять предельное напряженное состояние, «выключаться» сразу после разрушения скачком или постепенно менять свои прочностные свойства и т.д.). Таким образом, оценка прочностных параметров микронеоднородного материала превращается в сложную проблему механики твердого тела. Важность сформулированной про-

блемы неоспорима, поскольку большинство известных материалов в той или иной степени относятся к классу микронеоднородных.

Можно предложить определенный методологический подход к решению этой проблемы, который с нашей точки зрения выглядит достаточно перспективным. В первую очередь следует осознать, что для микронеоднородного материала не существует в общем случае понятия прочности без указания его конкретного напряженного состояния.

Поэтому проблему определения прочности можно сузить до решения нескольких задач об отыскании предельного соотношения между компонентами тензора напряжений, которые способен выдержать материал при условиях:

«простого» пути нагружения, когда все компоненты  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  тензора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру  $t$ ;

- схемы Кармана, когда повышают  $\sigma_1$  при заданных значениях  $\sigma_2 = \sigma_3$ ;
- обобщенной схемы Кармана, когда повышают  $\sigma_1$  при  $\sigma_2 > \sigma_3$ ;
- схемы Беккера, когда снижают  $\sigma_3$  при значениях  $\sigma_1 = \sigma_2$ ;
- обобщенной схемы Беккера, когда снижают  $\sigma_3$  при значениях  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

Методика определения прочности микронеоднородного материала складывается из следующих этапов:

- а) задаются схемой нагружения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ;
- б) определяют средние значения упругих постоянных для материала в целом;
- в) находят средние деформации материала, в целом используя гипотезу о равенстве деформаций у всех зерен общим деформациям материала, из обобщенного закона Гука по известным заданным значениям упругих постоянных каждого типа зерна, определяют все компоненты напряжений, действующих в каждом из них;
- г) по известному паспорту прочности каждого из зерен путем сравнения допустимого касательного напряжения с действующим находят запас прочности по каждому из зерен;
- д) поскольку до начала разрушения в упругой стадии соотношения между напряжениями будут сохраняться, определяют наиболее слабое по условиям прочности зерно минерала и находят нижнюю границу прочности материала, когда сохраняется его упругое состояние на всех компонентах;

е) задаваясь законом изменения свойств разрушенного минерала (упругих постоянных, прочностных параметров и их связью с деформациями), производят новые итерации согласно пунктам 2-6 и определяют последовательность разрушения минералов и связанную с этим прочность материала.

Необходимо отметить, что гипотеза о равенстве деформаций у всех зерен общим деформациям материала вносит заметные искажения в истинное распределение напряжений из-за сложной формы зерен, их разных условий контактирования с другими типами зерен, различия деформационных свойств и т.п.

Исходя из выполненного анализа можно считать предложенную теоретическую оценку прочности микронеоднородного материала как первое приближение, которое надлежит дополнить последующими итерациями. Эта проблема может быть отнесена к задачам будущих исследований.

Подытоживая, можно заключить, что впервые полученное решение проблемы вычисления прочности микронеоднородного материала (например, зернистой породы) по известным механическим свойствам его компонент позволяет выйти на формулирование и решение перспективного класса задач оценки механических свойств микронеоднородного тела.

### **3.2.2 Методика определения прочностных свойств микронеоднородного материала**

Практическая важность полученного теоретического решения состоит в том, что во многих случаях можно отказаться от традиционных сложных и трудоемких натурных и лабораторных испытаний горных пород.

Как известно, подавляющее число различных материалов, и, в первую очередь, горных пород, подвергаются разнообразным механическим испытаниям для оценки их механических свойств. На механических свойствах отражается весь технологический процесс отбора проб, их сохранности при транспортировке в лабораторию, изменение температурно-влажностного режима, механические воздействия при подготовке образцов, особенности приложения нагрузки, свойства испытательного оборудования, методики проведения испытаний и пр. Следовательно, численные характеристики механических свойств материалов



во многом зависят от точного соблюдения регламента всей процедуры и методики испытаний, что зачастую сложно выполнить. Вот почему результаты определения механических свойств даже одних и тех же материалов нередко оказываются несопоставимыми. Особенно это касается горных пород.

Характеристики механических свойств материалов должны по возможности не зависеть от случайных привходящих параметров и факторов, приведенных выше, а обладать сопоставимостью и быть пригодными для использования в конструкторской и расчетной практике. До настоящего времени отсутствовала теоретическая база, которая смогла бы обосновать те механические параметры, по которым можно было бы получать другие характеристики путем вычислений, что заставляет пользоваться различными методами механических испытаний и неоднозначно трактовать мало сопоставимые результаты испытаний (на сжатие, сдвиг, кручение, раскол, изгиб и пр.).

Чтобы избежать вышеуказанных сложностей, нами предлагается концептуально иная методология определения прочностных свойств микронеоднородных пород - аналитико-экспериментальная методика, основанная на аналитической теории прочности. Суть ее состоит в следующем:

а) изучают в лаборатории по шлифам минералогический состав микронеоднородного материала (горной породы) и устанавливают названия породообразующих минералов;

б) устанавливают тип и состав цемента на контактах минералов, размер имеющихся пор и пустот;

в) определяют по шлифам удельную площадь, которую занимают породообразующие компоненты, причем эта площадь трактуется как их геометрическая характеристика  $\psi_i$ ;

г) далее выдвигается гипотеза о постоянстве механических характеристик породообразующих минералов:

1) группа кварца: кварц, кремень, халцедон и др.;

2) группа силикатов: полевые шпаты, слюды, амфиболы, пироксены и др.;

3) карбонаты: кальцит, доломит и др.;

5) гидрофильные глинистые: монтмориллонит, каолинит и др.; гидрофобные: гипс, галит и др.).

д) составляется путем проведения высокоточных механических испытаний кадастр механических свойств породообразующих минералов;

е) в соответствии с кадастром механических свойств минералов определяются путем выборки из заранее составленных его таблиц необходимые исходные свойства для минералов взятой для испытаний породы, к числу которых относятся:

1) упругие показатели минерала:  $E$  – модуль продольной упругости, МПа;  $G$  – модуль сдвига, МПа;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;

2) показатели паспорта прочности минералов:  $\alpha$  – параметр хрупкости,  $\tau$  – когезия сдвига, МПа;  $\sigma$  – когезия разрыва, МПа;

ж) по формуле (3.38) вычисляют показатели паспорта прочности микронеоднородного материала, а в соответствии с ним – все остальные прочностные характеристики (пределы прочности на одноосное сжатие, растяжение, сдвиг, - если он существует, - и т.д.).

В качестве примера рассмотрим определение параметров паспорта прочности микронеоднородного материала – песчаника, который состоит из следующих породообразующих компонент:

Данные по минералам песчаника взяты из кадастра свойств минералов и пород [45] (табл. 3.2).

Таблица 3.2 Минералогический состав песчаника

| Минерал  | Удельная<br>сплошность,<br>$\psi$ | Модуль<br>упругости<br>$E \cdot 10^{-4}$ ,<br>МПа | Модуль<br>сдвига<br>$G \cdot 10^{-4}$ ,<br>МПа | Параметры паспорта<br>прочности |                     |          |
|----------|-----------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------|---------------------|----------|
|          |                                   |                                                   |                                                | $\tau_0$ ,<br>МПа               | $\sigma_0$ ,<br>МПа | $\alpha$ |
| 1.Кварц  | 0,50                              | 3,2                                               | 1,7                                            | 40                              | 5                   | 0,5      |
| 2.Шпат   | 0,35                              | 2,2                                               | 1,1                                            | 30                              | 8                   | 0,4      |
| 3.Цемент | 0,10                              | 1,2                                               | 0,8                                            | 10                              | 4                   | 0,3      |
| 4.Поры   | 0,05                              | $10^{-4}$                                         | $10^{-4}$                                      | 0                               | 0                   | 0        |

Подставив эти данные в формулы (3.33) получим значения усредненных постоянных микрзернистого материала – песчаника:

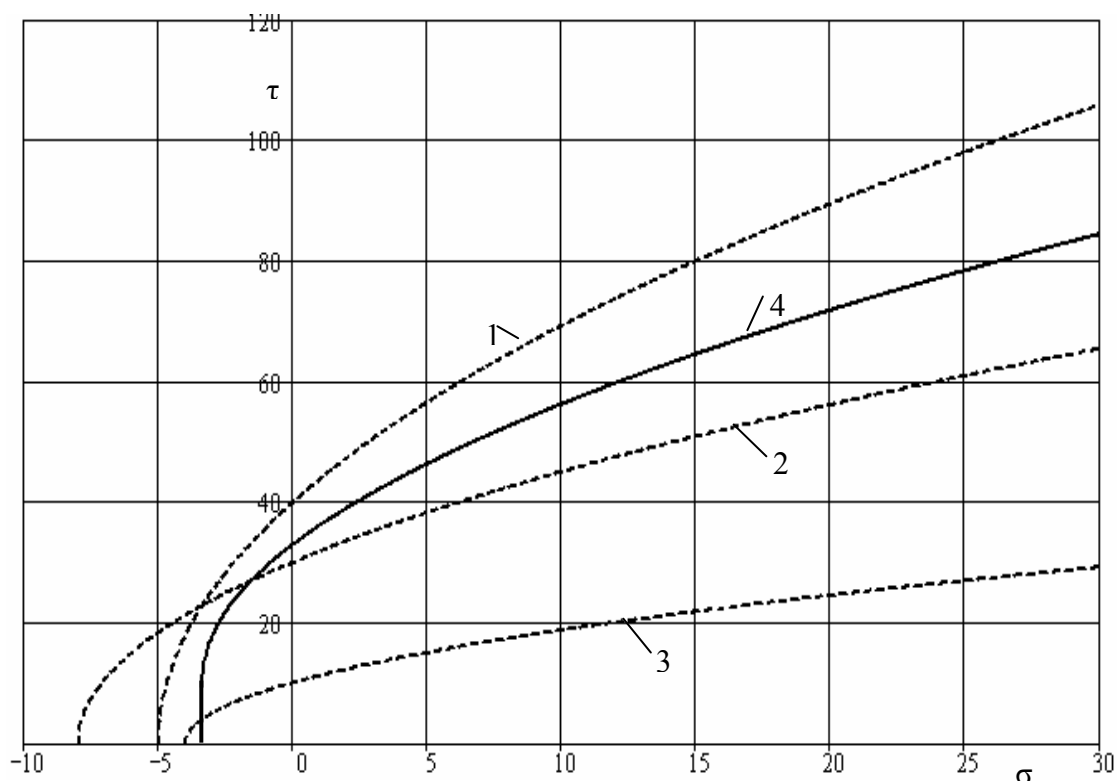
$$\begin{aligned}
g_i &:= \frac{G_i}{\text{mean}(G)} & g &= \begin{pmatrix} 1.889 \\ 1.222 \\ 0.889 \\ 0 \end{pmatrix} & e_i &:= \frac{E_i}{\text{mean}(E)} & e &= \begin{pmatrix} 1.939 \\ 1.333 \\ 0.727 \\ 0.001 \end{pmatrix} \\
\beta_i &:= \frac{\alpha_i \cdot \psi_i \cdot g_i}{e_i} & \beta &= \begin{pmatrix} 0.244 \\ 0.16 \\ 0.061 \\ 0 \end{pmatrix} & \tau_{-0} &:= \sum_{i=1}^n \tau_{0i} \cdot \psi_i & \tau_{-0} &= 31.505
\end{aligned}$$

Далее определяем паспорта прочности каждого из компонент и микронеоднородной породы в целом

Из графиков на рис. 3.24 можно видеть, что результирующий паспорт прочности песчаника занимает промежуточное положение среди паспортов прочности слагающих песчаник минералов. На такое значение прочности можно ориентироваться, как на приближенную оценку, которую можно затем уточнять ограниченным числом экспериментов в виде лабораторных испытаний образцов.

### 3.3 МАСШТАБНЫЙ ЭФФЕКТ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ МАССИВОВ

В последнее время большое внимание ученых привлекает фундаментальная проблема описания протекания различных физических процессов в средах сложного структурного строения. К таким средам в первую очередь следует отнести массив горных пород, а также широкий спектр естественных и искусственных материалов: лед, уплотненный снег, пески и грунты, минералы и породы, бетон, бумага, композиты, биологические структуры и др. Многочисленными опытами было обнаружено, что при изменении размеров образцов их свойства (в том числе и прочность) меняются. Важность этой проблемы для горной промышленности состоит в том, что все горноинженерные воздействия на массив должны выполняться на основе достоверных знаний о свойствах и состоянии горных пород, слагающих этот массив.



1 – кварц; 2 – полевоы шпат; 3 – цемент; 4 - общий паспорт прочности

Рис.3.24 – Паспорта прочности минералов, слагающих микронеоднородный песчаник

Феномен изменения каких либо свойств материала при варьировании размеров (масштаба) образцов носит название масштабного эффекта (МЭ). Важно отметить, что МЭ в той или иной мере проявляется у всех неоднородных по своему составу (гетерогенных) материалов: горных пород, бетонов, растворов, дерева, льда, снега и т.д. Закономерностям МЭ подчиняются все свойства структурно неоднородных материалов: механические (деформационные и прочностные), электромагнитные (электропроводность, магнитная восприимчивость, диэлектрическая проницаемость и др.), тепловые (коэффициенты теплопроводности, диффузии, и пр.), волновые (скорости продольной и поперечной волн, декременты затухания и др.), фильтрационные и т.д.

Вначале МЭ был экспериментально обнаружен при определении прочностных свойств горных пород и проблема МЭ изучалась именно в этом аспекте [46 - 49 и др.], без обобщения на другие свойства материала, что значительно сузило и замедлило изучения физической сути этого интересного и широко распространенного явления. Однако МЭ имеет

намного более общее значение и входит в до сих пор не решенную проблему описания зависимости свойств материалов от их структурного строения.

В настоящее время установлено, что МЭ обусловлен сменой структурного строения образца при изменении его размеров, чаще всего в массивах горных пород МЭ обусловлен наличием систем трещин (трещиноватости) и различного рода неоднородностей. В практике ведения горных работ МЭ учитывается весьма приближенно, что ведет к опасным или даже катастрофическим последствиям: горным ударам, выбросам породы и угля, разрушению оснований дамб и плотин и др. Обоснованной теории МЭ до сих пор не существует. Поэтому проблема оценки МЭ является весьма актуальной.

Целью исследований являлась разработка теоретических основ расчета МЭ. Для этого необходимо рассмотреть задачи определения исходных данных об ослаблениях в породном массиве, дать аналитического описание МЭ и установить закономерности, которым он подчиняется.

### **3.3.1 Дефиниции феномена масштабного эффекта**

#### ***3.3.1.1 Особенности описания масштабного эффекта (МЭ)***

Рассмотрим проблему получения исходных данных о структурном строении массива, которая до сих пор формулировалась весьма неопределенно. Пусть по мере увеличения масштаба изменяется по определенному закону и нарушенность (например, трещиноватость) массива. Следовательно, возникает задача адекватного описания структуры среды при наличии различных систем неоднородностей (для массива – чаще всего трещин). Даже единичную неоднородность (трещину) характеризуют многие параметры: ориентация в пространстве (азимут и угол падения), форма (размеры по падению и простиранию), площадь и прочностные показатели (параметр хрупкости, когезия сдвига и отрыва).

Для системы трещин эти показатели принимаются осредненными (приближенно) по всей выборке из заданной совокупности трещин, входящих в систему. К ним добавляются новые важные параметры, отражающие свойства всей совокупности. В первую очередь это поврежденность  $\omega$  – относительная площадь трещин (ослаблений, дефектов) на

площадке разрушения. Следуя Л.М. Качанову [2], вводим понятие сплошности  $\psi = 1 - \omega$  как меру сохранности структуры массива. Иными словами, сплошность – это удельная часть не нарушенной ослаблениями поверхности. Сразу следует указать, что здесь может появиться необходимость введения уточнений, поскольку форма трещин может быть разной, следует учитывать анизотропию свойств плоскости с ослаблениями, их взаимную ориентацию в пространстве и др. Однако учет ряда параметров в большинстве случаев оказывается невозможным ввиду сложности получения исходных данных о массиве горных пород и его неоднородностях.

По установившейся традиции, многие исследователи пытались описать МЭ прочности с помощью чисто геометрических соотношений, куда входили размер образца и характерный размер массива. Это был эмпирический подход, основанный на экспериментальных результатах, полученных путем лабораторных исследований образцов и натурных испытаний крупных породных блоков [50 – 52 и др.]. Такого рода лабораторные и натурные испытания могли дать лишь сугубо приближенные оценки о порядке получаемых соотношений прочности главным образом при одноосном сжатии. Роль напряженного состояния на изменение МЭ прочности по этим исследованиям предвидеть, а тем более предсказать, было невозможно.

### ***3.3.1.2 Формулирование понятия масштабного эффекта***

Для придания понятию МЭ большей четкости и достоверности перейдем к более точному его определению, в целом совпадающему с интуитивным содержанием, которое обычно вкладывают в это понятие.

Для этого под МЭ будем понимать степень изменения физического свойства в заданном объеме массива горных пород (среды) по сравнению со свойством базового образца меньшего размера при тех же его состоянии и внешних воздействиях. В качестве базы могут служить произвольные объемы массива, не обязательно однородные. Поэтому МЭ будет зависеть от соотношения систем трещин и неоднородностей разного порядка, которые заключены в сравниваемых объемах, из чего следует относительный характер этого понятия. Отсюда следует, что бессмысленно, как это делается сейчас, называть только численную величину МЭ без указания, какие по величине площади (объемы) мате-

риала сравниваются друг с другом и при каком именно его состоянии и внешних воздействиях (напряженном, деформационном, электромагнитном и др.).

Под масштабным эффектом (МЭ) следует понимать не только степень изменения прочности материала в связи с изменением размеров сравниваемых площадей (объемов), как это представлено в [46,47], но и изменение любых других свойств материала (механических, электрических, тепловых, радиоактивных и др.). Для каждого из этих свойств необходима разработка своих физических моделей о влиянии изменения размеров. В общем случае такие аналитические зависимости будут различаться по каждому свойству или показателю материала. С целью уточнения дефиниций, введем понятие масштабного фактора (МФ) по какому либо из свойств материала. По сути, это не что иное, как частная производная от рассматриваемого свойства по характерному размеру (длине, площади, объему). Однако, поскольку такая производная является размерной, ее трактовка в определенной степени затруднительна.

Поэтому, наряду с обычной трактовкой МФ, который выражается в виде отношения любого  $i$ -того из  $n$  показателей  $a_i$  ( $i = \overline{1...n}$ ) в разных масштабах, - конечном  $l_*$  и начальном  $l_0$ , - в виде:

$$Mf(a_i; l_*; l_0) = a_i(l_*) / a_i(l_0) , \quad (3.40)$$

мы предлагаем определять масштабный фактор не дискретно усредненным на отрезке  $[l_0; l_*]$ , а вычислять в заданной точке как градиент (частную производную) одного из показателей  $a_i$  ( $i = \overline{1...n}$ ) по масштабу избранной размерности  $l$ , а именно:

$$mf(a_0; l_0) = \frac{l_0}{a_0} \frac{\partial a_i}{\partial l} \quad (3.41)$$

Следует обратить внимание на то, что при использовании конкретного значения МФ необходимо всегда указывать параметры, при котором он определен. В первом случае (3.40) - это отрезок масштабной шкалы, а во втором (3.41) – это те исходные данные  $a_0, l_0$ , при которых определяется МФ. Если  $mf > 0$ , то показатель свойств возрастает по мере возрастания масштаба, при  $mf < 0$  – наоборот, снижаются.

Без указания исходных параметров упоминание о значении МФ, а тем более оперирование им в расчетах, представляется бессмысленным, а во многих случаях и опасным. К сожалению, в настоящее время такое использование МФ из-за отсутствия теоретических обоснований, является обычным.

Хотя представление МФ как частной производной в виде (3.41) сложнее, чем (3.40), оно обладает неоспоримыми преимуществами. В частности, в предлагаемой трактовке МФ является безразмерным коэффициентом и показывает, насколько и в какую сторону изменяется МФ в любом заданном масштабе, т. е. дает полную картину поведения показателя в скользящей масштабной шкале изменений. Путем прямого или численного интегрирования (3.41) можно получить функцию (3.40) как секущую на любом заданном интервале изменения масштаба.

### 3.3.2 Описание неоднородностей горного массива

В данном исследовании мы рассмотрим МФ прочности массива горных пород, оставляя задачи оценки МФ других свойств на будущее. С этой целью следует оценить возможность использования натуральных данных о неоднородностях массива для суждения об изменениях прочности пород в образцах разных размеров.

Задача натуральных исследований сводится к определению связи между параметрами нарушенности, чаще всего в виде ослаблений контактов и трещин, и способами их реальной интерпретации после измерений известными методами геофизики и маркшейдерии [52]. Пусть нам будут известны с помощью геофизических методов удельная площадь трещин на каждой произвольной  $j$ -той плоскости массива, т.е.  $\omega_j$ . Тогда сплошность по этой плоскости равна  $\psi_j = 1 - \omega_j$ . Эта информация уже становится пригодной для решения определяющих уравнений новой аналитической теории прочности [53, 54]. Следовательно, именно эти данные надо получать из обследования состояния горного массива. Очертим круг задач по определению дефектности пород по известным данным о строении массива.

Отвлекаясь от проблемы генезиса трещин, исследуем гипотетически возможные случаи, которые могут встретиться при изучении распределения трещин в массиве. На рис. 3.25 представлены три сечения одного и того же массива горных пород с известным распределением



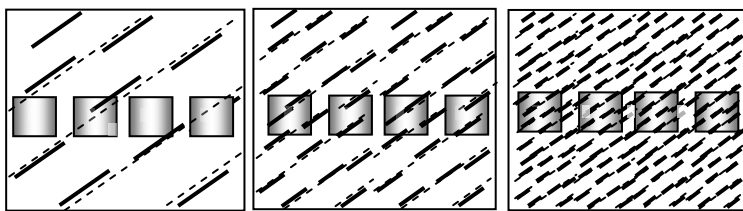


Рис.3.25 – К оценке поврежденности образцов разного размера

трещин, только размер породных образцов последовательно увеличен в 2 и 4 раза.

Нетрудно убедиться, что при прочностных испытаниях образцов пород раз-

личных размеров, отобранных из одного и того же породного блока, мы получим разные результаты. Прослеживается почти очевидная закономерность: чем больше размер образца по сравнению с характерным размером трещин, тем меньше его прочность и тем более устойчивы результаты испытаний (и наоборот). Поэтому следует учитывать соотношение размеров образца и характерного размера трещин (линейное, по площади или объемное). Поскольку сопротивление разрушению связано с распределением напряжений, то следует предпочтение отдать характеристикам трещины и поверхностей ослабления по площади. Эти закономерности обосновывают направленность проведения экспериментальных и аналитических исследований для оценки МЭ.

Введем, следуя идеям работы [2], нормированные параметры для описания степени неоднородности (или ослабления) массива:

- 1)  $\omega$  - поврежденность, которая определяется по формуле  $\omega = A_t / A$ , где  $A$  и  $A_t$  – общая площадь и площадь трещин на поверхности ослабления;
- 2)  $\psi = 1 - \omega$  - сплошность, аддитивно дополняющая поврежденность;
- 3) линейный структурный параметр - средний размер  $d_c$  и среднее расстояние между неоднородностями на поверхности ослабления  $l_c$ .

### 3.3.2.1 Аналитическая модель и порождающее решение для МЭ

Продemonстрируем высказанные соображения на достаточно простой плоской идеализированной расчетной модели МЭ, содержащей систему трещин, представленной на рис. 3.26 (обобщение на объемный случай очевидно).

Введем весьма важное понятие «структурного» блока массива для данной системы трещин, для чего каждую трещину усредненных размеров заключим в центр структурного блока. Его размеры равны

линейным параметрам системы трещин. Массив будет сложен из этих структурных блоков одинаковых размеров, по простиранию равных среднему расстоянию между центрами трещин, а по нормали – расстоянию между плоскостями ослабления, которые образованы трещинами. Получаем форму структурных блоков в виде прямоугольных параллелепипедов, слагающих горный массив.

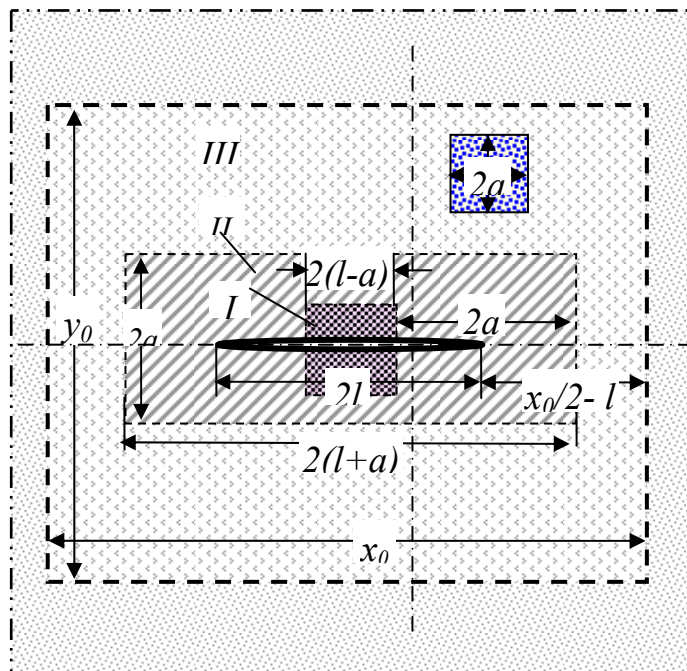


Рис.3.26 - Расчетная модель для МЭ

Таким образом, структурный блок охватывает трещину средней длины  $2l$ , соответствует средним расстояниям  $x_0$  и  $y_0$  между трещинами данной системы и является элементарным блоком массива для заданных неоднородностей.

Идея моделирования МЭ заключается в том, что внутри такого блока случайным образом помещаем пробный образец с заданными размерами  $2a$ . Для плоской задачи это квадратный, а для трехмерного случая – кубический пробный образец. Его поврежденность  $\omega$  изменяется в зависимости от того, попадает ли он на участок с трещиной или на область вне её. Именно этот параметр  $\omega$  (или  $\psi$ ) полностью отражает структурные особенности массива для заданной системы трещин и предопределяет закономерности проявления МЭ для различных физических свойств, в том числе и для прочности.

Вероятность попадания пробного образца в ту или иную зону прямо пропорциональна ее площади  $A_i$ , отнесенной к общей площади структурного блока  $A_0 = x_0 y_0$ , т.е.  $p_i = A_i / A_0$ . Чтобы определить математическое ожидание сплошности  $\psi$  пробного образца заданного размера  $a$ , необходимо рассмотреть пределы ее изменения при попадании центра образца в различные зоны. Основываясь, согласно принципу правдоподобия, на равномерном законе распределения сплошности, следует взять среднее арифметическое между предельными её значениями.

Введем важный параметр, отражающий геометрические соотношения структурного блока  $A_0$  и трещины длиной  $2l$ :  $\xi(l) = x_0/2 - l$ . От него будут зависеть размеры различных областей изменения сплошностей пробного образца.

Выделим следующие области, которые могут встретиться при случайном попадании пробного образца размером  $a$

$A_1$  - область полной поврежденности, где  $\omega_1 = 1$

$A_2$  - область, где трещина находится внутри образца  $\omega_2 = C_2$

$A_3$  - образец своими краями захватывает сразу 2 трещины  $\omega_3 = C_3$

$A_4$  - область частичного перекрытия образца трещиной  $\omega_4 = var$

$A_5$  - бездефектная область  $\omega_5 = 0$

### 3.3.2.2 Результаты исследования аналитической модели МЭ

Не приводя громоздких систем уравнений для каждой из площадей, представим графически (рис. 3.30,3.31), как выглядят результаты определения сплошности в массиве со структурным блоком  $x_0=y_0=10$  м и с системой трещин средней длины  $2l=6$  м.

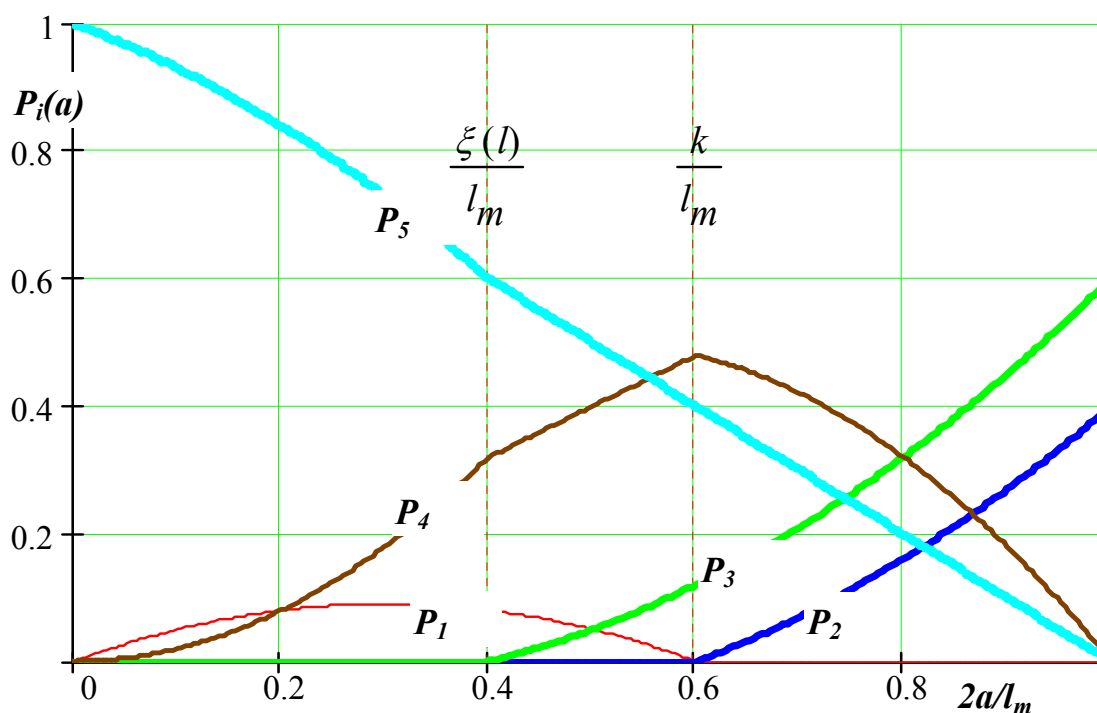


Рис.3.27 - Вероятности  $P_i$  попадания образца размером  $2a$  в различные области  $A_i$  структурного блока размером  $10 \times 10$  м с трещиной  $2l_m = 6$  м

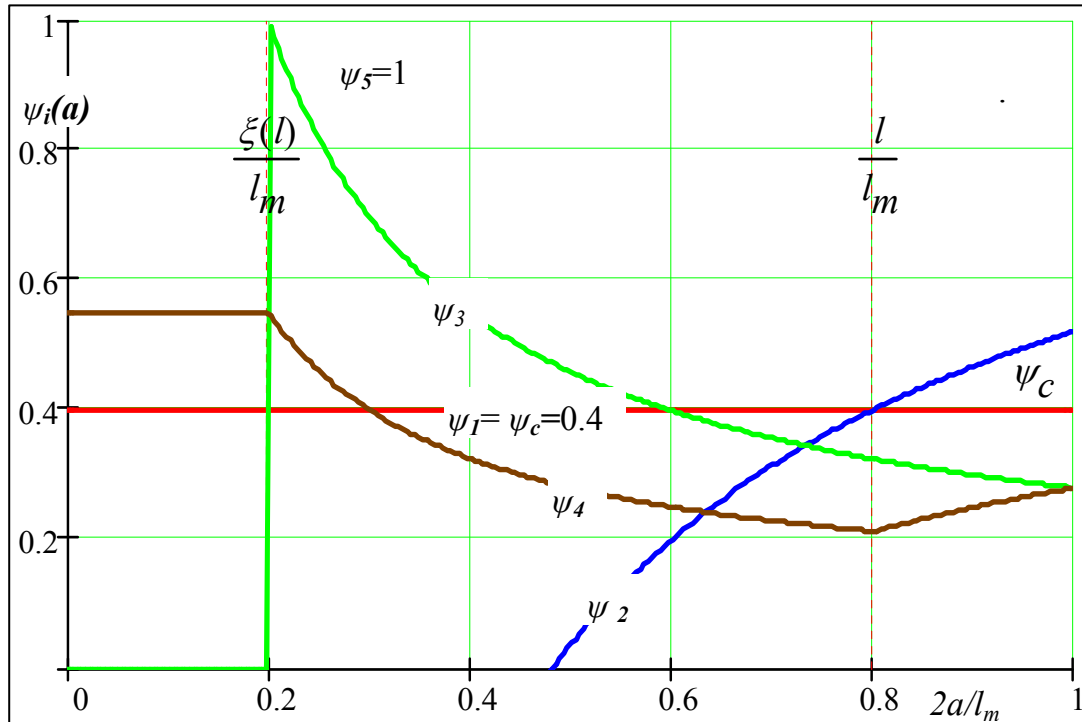


Рис.3.28 - Зависимость сплошностей  $\psi_i$  от размера образца  $x$  при его попадании в различные области  $A_i$  структурного объема  $10 \times 10$  м с трещиной  $2l=8$  м, на которой  $\psi_c=0.4$

Чтобы определить зависимость сплошности  $\psi(a)$  образца от его размера  $a$ , следует вычислить сумму произведений сплошностей (рис. 3.28) на соответствующую вероятность (рис. 3.27) попадания образца на каждую  $i$ -тую площадь (а таких площадей 5) по формуле

$$\psi(a) = \sum_{i=1}^5 \psi_i(a) p_i(a) \quad (3.42)$$

Выполнение вычислений и построение соответствующих графиков привело к совершенно неожиданному результату – все графики (рис. 3.29) оказались... линейными (!). Следовательно, масштабный фактор, отражающий особенности структурного строения массива, линейно зависит от размера пробного образца.

Эта весьма важная закономерность, позволяющая применить мощный принцип суперпозиции при описании структурных особенностей массива с каким угодно сложным сочетанием систем плоских ослаблений (трещин, контактов и т.д.) и с произвольными условиями изменения сцепления на них. Это полностью решает ранее казавшуюся непреодолимо сложной проблему количественного описания масштаб-

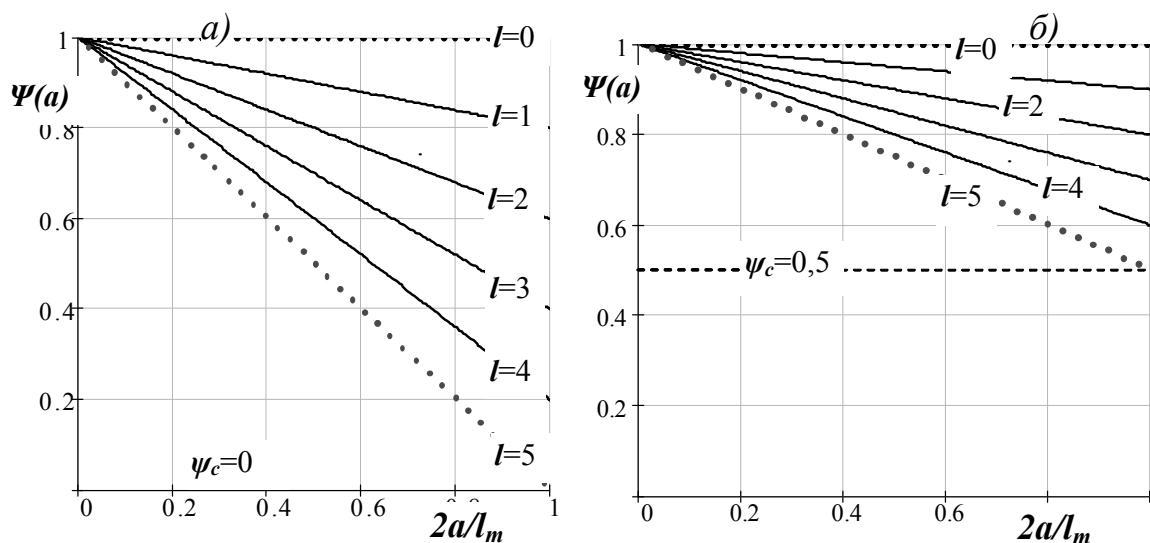


Рис. 3.29 - Зависимость сплошности образца от его размера  $2a$  при изменении длины трещины  $2l$  в структурном блоке при а)  $\psi_c=0$ ; б)  $\psi_c=0,5$

ного эффекта и показывает сомнительность существующих нелинейных формул [46 – 51].

Решение этой проблемы стало возможным после того, как она впервые была расчленена на две самостоятельные задачи:

- а) описание структурного строения массива с неоднородностями
- б) определение произвольных физико-механических свойств массива с заданными структурными особенностями.

Именно первой части этой сложной проблемы и были посвящены наши исследования масштабного эффекта. Полученная важная закономерность линейного закона изменения сплошности структурного блока в зависимости от размера пробного образца является мощным инструментом дальнейшего исследования поврежденности массива при сколь угодно сложном его структурном строении, включая разнообразно ориентированные системы трещин и ослаблений.

### 3.3.3 К основам структурной геомеханики

Убедившись в правомочности принципа суперпозиции, можно перейти к описанию структурной геомеханики неоднородных массивов, т.е. к решению проблемы масштабного эффекта.

Пусть в исходном горном массиве с помощью геофизических и натурных исследований для некоторой выделенной системы поверхно-

стных неоднородностей (трещин, контактов и ослаблений) известны ее геометрические и деформационно-прочностные показатели.

Введем базовые обозначения, удобные для прикладного использования. Неоднородности представим в виде условного прямоугольника с размерами  $l_1$  и  $l_2$ , а размеры структурного блока, который имеет форму прямоугольного параллелепипеда, обозначим  $b_1 b_2 b_3$ , причем, не умаляя общности рассуждений, неоднородность находится в его центре и коллинеарна плоскости  $b_1 b_2$ , т.е. имеет направляющий вектор  $b_3$ . Важной особенностью структурного блока является то, что возрастание его объема не приводит к изменению его поврежденности, т.е. его размеры отвечают принципу минимальности.

Используя эти обозначения, можно вычислить масштабный фактор, показывающий зависимость поврежденности  $\omega(x)$  от размера пробного образца  $x$  для заданной системы неоднородностей:

$$\omega(x) = \omega_* \Gamma(x) \frac{l_1 l_2}{V_b}, \quad \Gamma(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < b_3 \\ b_3 & \text{при } x > b_3 \end{cases} \quad (3.43)$$

где  $\omega_*$  - поврежденность на участке контактного ослабления,  $0 < \omega_* \leq 1$ ;  
 $V_b = b_1 b_2 b_3$  - средний объем структурного блока.

Зависимость (3.43) является фундаментальной в теории структурной геомеханики неоднородных массивов и, благодаря функции  $\Gamma(x)$ , которая подобна прерывателю Герсевича, возрастает прямо пропорционально  $x$  и затем становится горизонтальной линией.

В частном случае, который весьма типичен для массивов осадочных горных пород, где наблюдаются ослабления в виде слоевых контактов между пластами, фундаментальная зависимость (3.43) вырождается в интуитивно понятную формулу, поскольку в этом случае соотношение площадей ослабления и блока:  $l_1 l_2 / b_1 b_2 \Rightarrow 1$

$$\omega(x) = \omega_* \Gamma(x) / b_3, \quad \Gamma(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < b_3 \\ b_3 & \text{при } x > b_3 \end{cases} \quad (3.44)$$

Опираясь на принцип суперпозиции, порождающее соотношение (3.43) можно распространить на более общий случай, когда в массиве имеется  $n$  систем компланарных ослаблений, что дает:

$$\omega(x) = \omega_0 + \sum_{i=1}^n \left[ \omega_* \Gamma(x) \frac{l_1 l_2}{V_b} \right]_i, \quad \Gamma(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < b_3 \\ b_3 & \text{при } x > b_3 \end{cases} \quad (3.45)$$

где  $\omega_0$  - исходная поврежденность нулевого порядка в массиве;

$i$  –тая из  $n$  компланарных систем ослаблений в массиве.

Обобщение фундаментальных зависимостей (3.43) и (3.45) можно также сделать в виде перехода от дискретного представления поврежденности массива, содержащего различные дискретные коллинеарные системы ослаблений, к непрерывному учету всего многообразия изменения их параметров – площадей  $A = l_1 l_2$ , объема структурных блоков  $V_b$  и поврежденностей  $\omega_*$

$$\omega(x) = \omega_0 + \int_{\omega_*} \int_A \int_{V_b} \omega_* \Gamma(x) \frac{A}{V_b} d\omega_* dA dV_b \quad (3.46)$$

Разумеется, для этого необходимо знать законы или функции распределения каждого из переменных структурных параметров по всему многообразию их изменения в массиве, т.е. это требует весьма значительного объема геофизических исследований и сложной программы их обработки. Из общих теоретико-экспериментальных соображений можно полагать, что параметры структурных блоков массива являются, в силу своего генезиса и геологической истории развития, случайными величинами и подчиняются в основном логнормальному закону распределения. Исследование вероятностных законов распределения структурных неоднородностей можно выполнить по методике, изложенной в работе [48, 49].

Полученные результаты позволяют четко сформулировать цели и объекты измерений структурных неоднородностей в массиве. Так, геофизическими изысканиями, описанными в [52], следует установить:

- размеры пространственного структурного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с объемом, соответствующими линейным размерам системы трещин  $V_b = b_1 b_2 b_3$ ;
- площадь  $A_{ij}$  трещины (ослабления) ( $A_{ij} < b_i b_j$ ) расположенной в центре структурного блока, где  $i, j$  – координаты, в плоскости которых находится ослабление;

- исходную поврежденность  $0 \leq \omega_0 \leq 1$  структурного блока, вызванную неоднородностями систем ослаблений меньшего порядка;
- сплошность  $\omega_b$  на поверхности ослабления (контакта, трещины)

В качестве примера на рис. 3.30 приведены результаты наложения трех компланарных систем ослаблений в массиве с нулевой начальной поврежденностью. При этом если в дискретном представлении (3.43) сплошность массива отражает МЭ в виде ломаной линии (показаны сплошной линией), то в непрерывном описании (7) эти линии (показаны пунктиром) имеют вид плавных огибающих. Как видно из графиков, каждая система ослаблений вносит свой вклад в конечный (суммарный) масштабный эффект, который, как и следовало ожидать, не зависит от последовательности суммирования слагаемых.

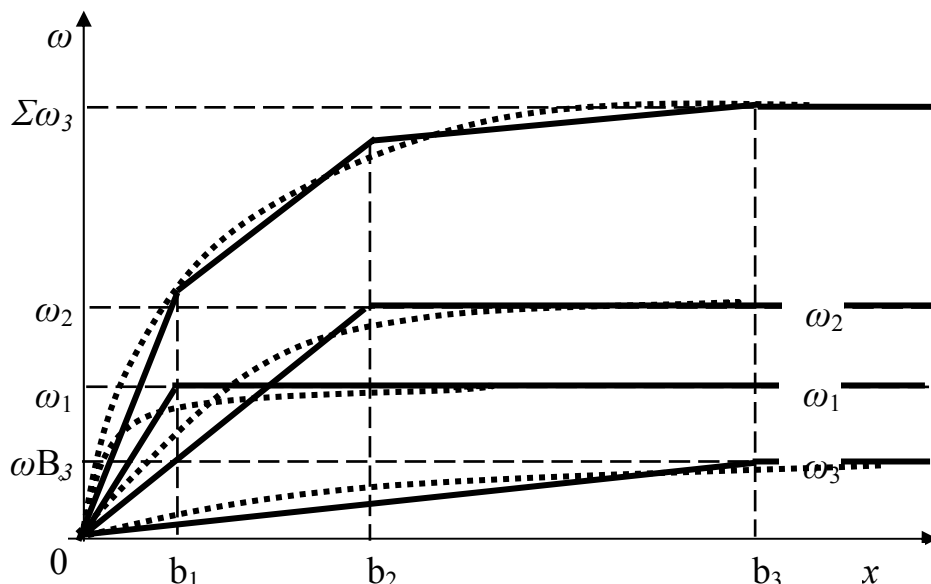


Рис.3.30 – Композиция общей поврежденности массива из трех компланарных систем ослаблений в дискретном и непрерывном представлении

Таким образом, МЭ принимает вид ломанной кривой, которая постепенно переходит в постоянную суммарную поврежденность, не зависящую от дальнейшего увеличения размера пробного образца  $x$ .

Тем самым мы получили достаточно важное по смыслу утверждение: для каждой заданной системы структурной нарушенности массива всегда существует предельное значение размеров пробного образца  $x_{max}$ , после превышения которого любые размеры блоков не изме-



няют своей нарушенности, т.е. масштабный эффект остается постоянным.

### 3.3.4 Исследование масштабного фактора прочности

После того, как внесена ясность в проблему описания структурного строения массива, можно перейти к проблеме определения масштабного фактора прочности. Главная трудность в проблеме определения МФ заключалась в том, что для получения количественных значений МФ необходимо уметь определять прочность массива с учетом его поврежденности, вызванной неоднородностью (трещиноватостью). С появлением аналитической теории микродефектного материала (горной породы) [53 - 55] такая возможность количественных оценок появилась.

Воспользовавшись уравнениями аналитической теории прочности [54 - 55], которая построена на решении дифференциальных уравнений, соответствующих той или иной степени трещиноватости массива пород, можно записать прочность ненарушенного (сплошного однородного) и нарушенного ослаблениями (в виде открытых трещин разрыва) материала в виде:

$$\tau_{nt} = \tau_0 \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^\alpha ; \quad (3.47)$$

$$\tau'_{nt} = \tau_0 \psi \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0 \psi} + 1 \right)^{\alpha \psi} , \quad (3.48)$$

Уравнение критерия прочности получено для горного массива с рассеянными открытыми трещинами на площади  $\omega = 1 - \psi$ . Следует обратить внимание на тот факт, что открытые трещины в массиве не только снижают его прочностные параметры  $\tau_0$  и  $\sigma_0$ , -когезии сдвига и отрыва, - но и значительно уменьшают кажущийся параметр хрупкости по сравнению с ненарушенным массивом  $\alpha * \psi < \alpha$ .

Масштабный фактор прочности будем определять как отношение предельных сдвигающих напряжений при разрушении материала:

$$M_f(x) = \frac{\tau'_{nt}}{\tau_{nt}} = \psi(x) \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0 \psi(x)} + 1 \right)^{\alpha \psi(x)} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^{-\alpha} \quad (3.49)$$

Основной величиной, предопределяющей МФ в этой зависимости является сплошность  $\psi = f(x)$ , которая способна в явном виде отразить все структурные особенности строения массива, которые можно определить натурными измерениями в массиве, что до настоящего времени целенаправленно не делалось.

В данной работе сосредоточим свое внимание на влиянии напряженного состояния на МФ прочности. Как видно из полученного выражения, МФ вовсе не является некоторой постоянной, не зависящей от напряжений и прочностных параметров, как это считалось ранее. Это сложная функция напряженного состояния и распределения трещиноватости. При напряжении, соответствующем чистому сдвигу ( $\sigma_n \rightarrow 0$ ) МФ сводится к сплошности  $\psi = 1 - \omega$ , в остальных случаях он изменяется по довольно сложному закону. В предельном случае при  $\sigma_n \rightarrow \infty$  мы получаем другую границу для МФ (не изменяя масштаба образца  $x$ ) в массиве с открытыми трещинами:

$$M_f = \frac{\tau'_{nt}}{\tau_{nt}} = \psi(x)^{1-\alpha\psi(x)} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_n} \right)^{\alpha[1-\psi(x)]} \quad (3.50)$$

Сложнее обстоит дело, если массив содержит все виды трещин – открытые и закрытые. Тогда уравнение для оценки масштабного фактора будет определяться из соотношений (8) и

$$\tau'_{nt} = \tau_0 \psi(x) \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0(1-\omega_1(x))} + 1 \right)^{\alpha\psi(x)} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0\psi(x)} + 1 \right)^{\alpha_c\omega_2(x)} \quad (3.51)$$

$$M_f = \frac{\tau'_{nt}}{\tau_{nt}} = \psi(x) \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0(1-\omega_1(x))} + 1 \right)^{\alpha\psi(x)} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0\psi(x)} + 1 \right)^{\alpha_c\omega_2(x)} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^{-\alpha}$$

Рассматривая те же границы изменения МФ, получим, что в условиях чистого сдвига ( $\sigma_n \rightarrow 0$ ) МФ также сводится к сплошности  $M_f(x) = \psi(x) = 1 - \omega(x)$ , а в условиях возрастающего всестороннего сжатия

$$M_f(x) = \frac{\tau'_{nt}}{\tau_{nt}} = \psi(x)^{1-\alpha\omega_2(x)} [1 - \omega_1(x)]^{-\alpha\psi(x)} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_n} \right)^{\alpha\omega_1(x)} \quad (3.52)$$

На рис. 3.31 показан трехмерный график МФ породного массива в приведенных координатах в зависимости от напряжения  $0 < \sigma < 100$  и параметра хрупкости  $0 < \alpha < 1$  при сплошности  $\psi = 0,5$  и когезии  $\sigma_0 = 1$ .

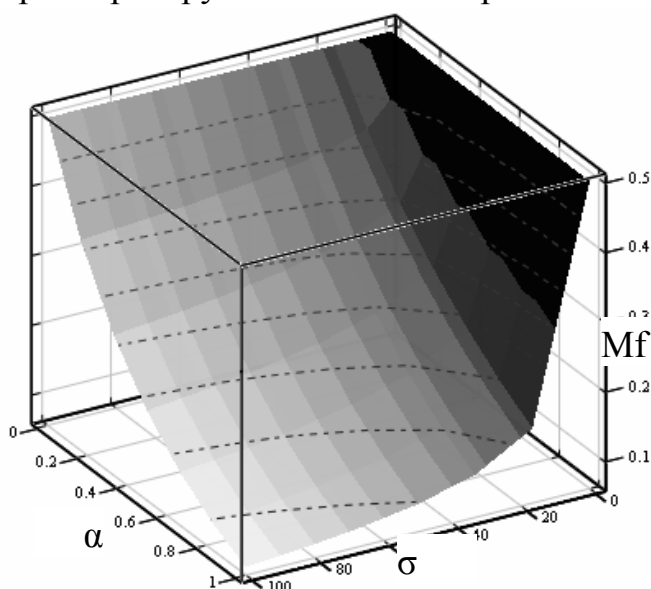


Рисунок 3.31 - Изменение МФ в массиве

Можно проследить, как изменяется МФ от объемного напряженного состояния массива.

Новой закономерностью, вытекающей из полученных аналитических выражений, является явная зависимость МФ от коэффициента хрупкости  $\alpha$  материала, т.е. от особенностей поведения материала под нагрузкой. В частности, для пластичных пород (и материалов вообще) при  $\alpha = 0$  масштабный фактор не за-

висит от напряженного состояния и численно равен сплошности.

Для хрупких горных пород, у большинства из которых  $\alpha \gg 0$ , МФ чрезвычайно сильно зависит от напряжений. При возрастании объемного напряженного состояния МФ резко уменьшает прочность массива.

Практическая ценность такого результата об изменении МЭ состоит в том, что с увеличением глубины разработки массив горных пород оказывается в предельном напряженном состоянии, и если в нем недостаточно много нарушений, то происходит исчерпание прочности и развязывается механизм горного удара или выброса. Для более сложных систем трещин и уравнений прочности массива эти закономерности остаются в силе.

Следовательно, мы обнаружили весьма существенное влияние напряженно-деформированного состояния массива на изменение масштабного фактора. И если эта закономерность не будет принята во внимание при ведении горных работ на больших глубинах, то можно с вы-

сокой степенью достоверности ожидать значительного усложнения условий разработки месторождений и эксплуатации подземных сооружений.

Подытоживая полученные результаты, относящиеся к проблеме создания теоретических основ структурной геомеханики и масштабного эффекта, можно сделать некоторые выводы, в частности:

- предложены уточненные дефиниции масштабного эффекта, дано его обобщение для произвольных физических свойств материальной среды (горного массива);
- впервые разделены понятия физических свойств среды и феномена их изменения при смене масштаба;
- разработаны основы структурной геомеханики неоднородных массивов, введены понятия сплошности и структурного блока массива;
- предложена модель расчета структурного строения массива, впервые получено порождающее решение и доказан принцип суперпозиции поврежденностей в массиве;
- впервые решена проблема описания произвольных систем ослаблений массива и определения его МФ для дискретного и непрерывного представлений;
- сформулированы требования к геофизическим изысканиям структурного строения массива для получения исходных данных
- впервые теоретически исследован масштабный фактор прочности и его зависимость от напряженного состояния массива.

Разумеется, рассмотренными задачами далеко не исчерпывается весь диапазон теоретического и практического использования представленного здесь научного направления. Своего исследования ждут проблемы влияния структурных неоднородностей и масштабного эффекта на разнообразные свойства материалов и горных пород. В частности, для горной геомеханики весьма актуальными следует считать задачи описания свойств подземной гидро- и газодинамики, фильтрации, распространения тепловых полей в массиве горных пород и др.

## 4 ЭКСПЕРИМЕНТ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ

### 4.1 АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ПРИ ИСПЫТАНИИ ПОРОД В СТАБИЛОМЕТРАХ

Одним из наиболее доступных методов определения прочностных свойств пород в условиях объемного нагружения (неравномерного трехосного сжатия) является испытание образцов в виде кернов в стабилометре по схеме Кармана [46]. В этом приборе максимальное сжимающее напряжение передается на торцевые поверхности цилиндрического образца жесткими поршнями, а гидростатическое давление на боковую поверхность создается жидкостью. Таким образом, если исключить из внимания силы трения на торцах, в образце реализуется напряженное состояние  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ . Испытания образцов пород в стабилометре позволяют экспериментально определить предельную огибающую наибольших кругов напряжений диаграммы О.Мора (паспорт прочности).

Для разработки вычислительного алгоритма по определению параметров прочности, воспользуемся уравнениями аналитической теории прочности для однородного материала:

$$\tau(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0) := \tau_0 \cdot \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} + 1 \right)^\alpha; \quad (4.1)$$

откуда уравнение для вычисления угла внутреннего трения однородного материала:

$$f(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0) := \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} + 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot \frac{\tau_0}{\sigma_0}. \quad (4.2)$$

В этих уравнениях записаны предельное касательное напряжение  $\tau$  и коэффициент угла внутреннего трения  $f$  как функции прочностных параметров материала  $\sigma_0$ ;  $\tau_0$ ;  $\alpha$  и текущего значения нормального напряжения  $\sigma$  на площадке разрушения.

Запишем вспомогательную функцию для вычисления нормального напряжения на площадке сдвига  $\sigma$  через минимальное напряжение  $\sigma_3$

$$F(\sigma, \sigma_3, \sigma_0, \alpha, \tau_0) := \sigma_3 - \left[ \sigma + \tau(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0) \cdot \left[ f(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0) - \sqrt{1 + (f(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0))^2} \right] \right] \quad (4.3)$$

Для вычисления  $\sigma$  через  $\sigma_3$  воспользуемся вычислительной процедурой root:

$$F\sigma(\sigma_3, \sigma_0, \alpha, \tau_0) := \text{root}(F(x, \sigma_3, \sigma_0, \alpha, \tau_0), x) \quad , \quad (4.4)$$

а для вычисления предельного напряжения  $\sigma_1$  по значению минимального  $\sigma_3$  необходимо использовать уравнение:

$$F\sigma_1(\sigma_3, \sigma_0, \alpha, \tau_0) := F\sigma(\sigma_3, \sigma_0, \alpha, \tau_0) + \tau(F\sigma(\sigma_3, \sigma_0, \alpha, \tau_0), \sigma_0, \alpha, \tau_0) \times \\ \times \left[ f(F\sigma(\sigma_3, \sigma_0, \alpha, \tau_0), \sigma_0, \alpha, \tau_0) + \sqrt{1 + (f(F\sigma(\sigma_3, \sigma_0, \alpha, \tau_0), \sigma_0, \alpha, \tau_0))^2} \right]$$

Пусть по результатам испытаний образцов горных пород в стабиометре получены экспериментальные данные – для каждого  $i$  – того образца минимальное  $\sigma_{3i}$  и максимальное  $\sigma_{1i}$  нормальные напряжения, при которых произошло разрушение. Вычисление неизвестных параметров прочности по заданным исходным данным  $\sigma_{1i}$  и  $\sigma_{3i}$  производим с помощью метода наименьших квадратов. Обозначим в формулах этого метода исходные данные  $X_i = \sigma_{3i}$ ; а в качестве заданных значений прочности  $Y_i = \sigma_{1i}$ , решение ищем с помощью вычислительной процедуры Given при начальных приближениях

$$\tau_0 := 10 \quad \sigma_0 := 0.5 \quad \alpha := 0.7$$

Given

$$\sum_i \left( Y_i - F\sigma_1(X_i, \sigma_0, \alpha, \tau_0) \right)^2 = 0 \quad \begin{pmatrix} \sigma_{01} \\ \alpha_1 \\ \tau_{01} \end{pmatrix} := \text{MinErr}(\sigma_0, \alpha, \tau_0) \quad (4.5)$$

Полученные в результате математической обработки параметры паспорта прочности позволяют построить теоретическую кривую, соответствующую этим параметрам, а также воспроизвести предельные кру-

ги диаграммы О. Мора непосредственно по данным эксперимента и по теоретическим построениям согласно уравнению:

$$\text{Mor}(x, \sigma_1, \sigma_3) := \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4} - \left[ x - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} \right]^2} \quad (4.6)$$

Здесь круг диаграммы Мора строится в виде функции независимой переменной  $x$  и заданных компонент напряжений – минимальной  $\sigma_3$  и максимальной  $\sigma_1$ .

Чтобы оценить достоверность теоретического описания паспорта прочности с помощью аналитической теории, определялось корреляционное отношение, которое показывало степень отклонения теоретических данных от экспериментальных – тесноту связи. Корреляционное отношение определялось по известной зависимости пакета MathCAD:

$$r(x, y) := \frac{\sum (x - \text{mean}(x)) \cdot (y - \text{mean}(y))}{\sqrt{\sum (x - \text{mean}(x))^2} \cdot \sqrt{\sum (y - \text{mean}(y))^2}} \quad (4.7)$$

При использовании стандартной вычислительной процедуры пакета MathCAD  $\text{corr}(X, Y)$  определение корреляционного отношения значительно упростилось.

## 4.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАСПОРТОВ ПРОЧНОСТИ ПО ИСПЫТАНИЯМ ПОРОД В СТАБИЛОМЕТРЕ

Для оценки правильности аналитической теории прочности был произведен поиск всех ранее экспериментально полученных паспортов прочности разнообразных по генотипу горных пород. Обработка экспериментальных данных производилась по алгоритму, приведенному в п. 4.1, была единообразной и охватила около 20 паспортов прочности, опубликованных различными исследователями, отечественными и зарубежными [46, 56 - 59].

В качестве демонстрации обработки результатов и сопоставления их с теоретическими паспортами прочности горных пород приведем несколько примеров.

С использованием исходных данных [56], приведенных по результатам испытания пород в стабилometре в институте ВНИМИ, опре-

делим параметры прочности ряда реальных пород. В первую очередь возьмем данные по испытанию алевролита из ш. Обуховская-Западная (Донбасс) из скважины № 330.

Описание алевролита: цвет темно-серый, мелкозернистый в виде обломков размером 0,01-0,04 мм, метаморфизированный. Цемент базального типа (30%), глинистый с мусковитом и серицитом (до 25%), окварцованный с кальцитом (1-3%) и углистым материалом (15-25%). Объемный вес 2,7 г/см<sup>3</sup>. Эффективная пористость 1,88-2,09%.

Результаты испытаний в стабилометре представлены в виде следующей пары матриц для минимального и максимального  $\sigma_3$  и  $\sigma_1$  нормальных напряжений предельных кругов напряжений диаграммы О. Мора:

$$\sigma_{3e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 37.209 \\ 46.512 \\ 139.535 \\ 255.814 \end{pmatrix} \quad \sigma_{1e} = \begin{pmatrix} 232.558 \\ 397.674 \\ 469.767 \\ 839.535 \\ 1030.233 \end{pmatrix},$$

Тогда после выполнения вычислений в соответствии с разработанным алгоритмом получаем значения показателей прочности алевролита в терминах аналитической теории прочности:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{01} \\ \alpha_1 \\ \tau_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.345 \\ 0.601 \\ 29.129 \end{pmatrix}.$$

Следует обратить внимание на преувеличенное значение параметра хрупкости у алевролита, равное 0,6. Это можно объяснить тем, что кроме испытаний в стабилометре не были проведены опыты по определению когезии разрыва или хотя бы предела прочности на одноосное растяжение. Это, как было уже рассмотрено в параграфах 1-3, всегда приводит к неудовлетворительной трактовке поведения предельной огибающей кругов диаграммы Мора в области растягивающих напряжений.

Чтобы на диаграмме О. Мора построить теоретические предельные круги напряжений, необходимо записать функциональные зависимости  $f\sigma_3$  и  $f\sigma_1$  от нормального  $\sigma$  и касательного  $\tau$  напряжений на площадке разрушения



$$\begin{aligned} f\sigma_1(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0) &:= \sigma + \tau(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0) \cdot \left[ f(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0) + \sqrt{1 + (f(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0))^2} \right], \\ f\sigma_3(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0) &:= \sigma + \tau(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0) \cdot \left[ f(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0) - \sqrt{1 + (f(\sigma, \sigma_0, \alpha, \tau_0))^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Теперь можно вычислить корреляционное отношение, характеризующее статистический разброс теоретически вычисленных значений прочности от экспериментальных результатов по вычислительной процедуре corr сопоставления двух массивов данных Pearson Correlation Coefficient:

$$PCC_i := F\sigma_1(X_i, \sigma_{01}, \alpha_1, \tau_{01}) \quad \text{corr}(Y, PCC) = 0.991$$

Полученное значение корреляционного отношения 0,991 свидетельствует о высокой степени тесноты связи и достаточной достоверности определения параметров прочности при описании опытных данных с позиций аналитической теории прочности. Результаты вычислений представлены на рис. 4.1 в виде теоретического графика  $\sigma_1 = f(\sigma_3)$ , построенного по вычисленным параметрам прочности. Здесь же показаны опытные (экспериментальные) данные  $\sigma_1$  по каждому из испытаний и рядом – теоретически вычисленные данные. Следует обратить внимание, что в области растягивающих напряжений экспериментальные данные отсутствуют [56].

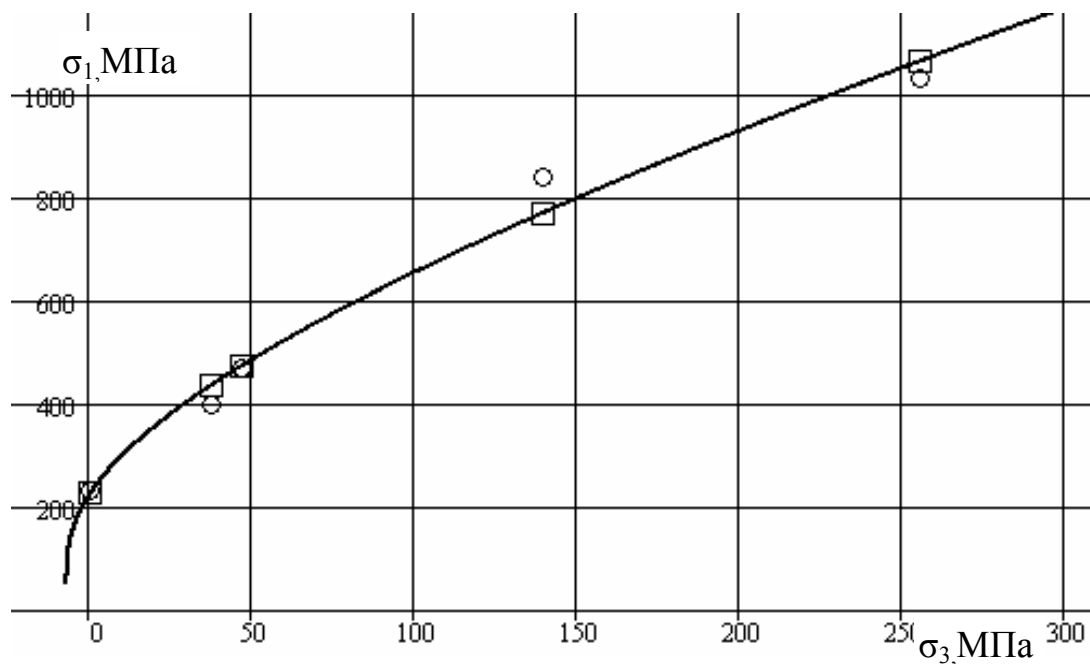


Рис. 4.1 –Экспериментальные ( $\circ$ ) и теоретические ( $\square$ ) данные для алевролита [56] в координатах  $\sigma_1$ -  $\sigma_3$ , МПа

Уравнение кругов Мора на диаграмме строим по напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  согласно вычислений по формуле (4.6).

Паспорт прочности на диаграмме Мора, построенный по ранее изложенной методике для алевролита представлен на рис. 4.2 в виде предельных кругов напряжений и огибающей их кривой. Как хорошо видно из полученных графиков, можно с уверенностью утверждать о вполне удовлетворительном совпадении теоретических расчетов с экспериментальными данными, что подтверждается высоким корреляционным отношением, равным 0,991.

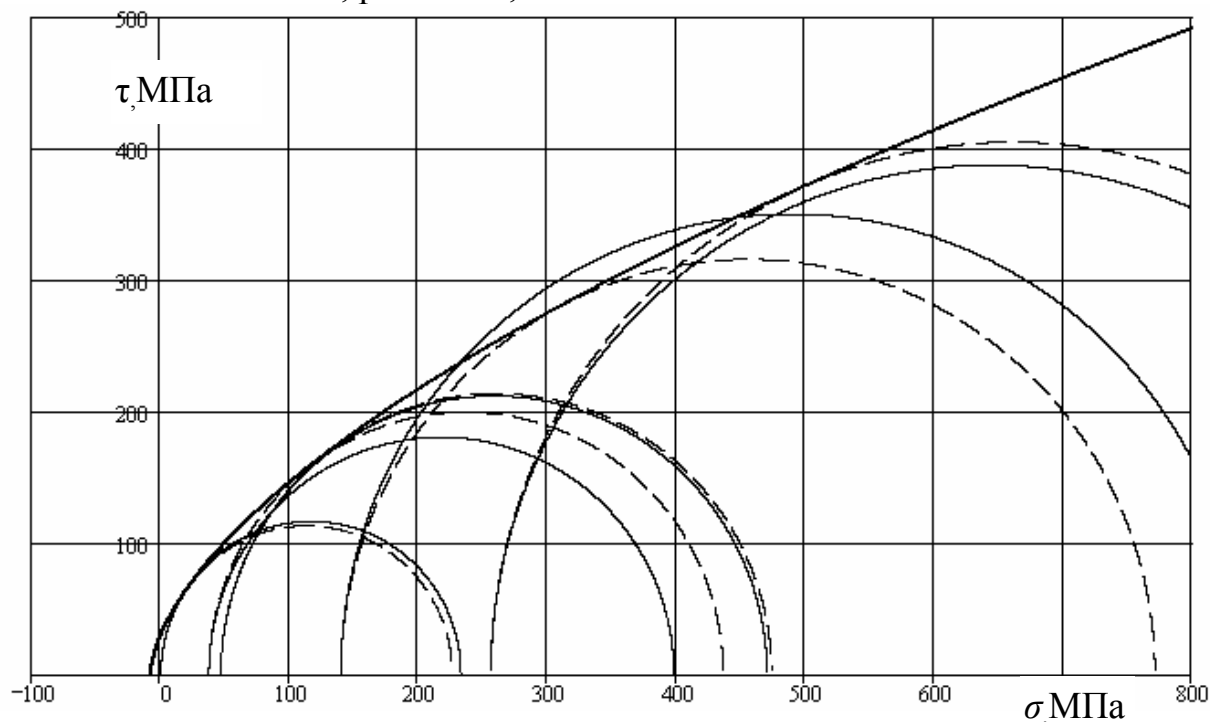


Рис. 4.2 –Предельные круги напряжений теоретические (пунктирные линии) и по экспериментальным данным для алевролита [46]

Таким образом, проверка работоспособности теории при определении параметров паспорта прочности алевролита дала вполне удовлетворительные результаты.

По данным работы [56] были таким же образом получены параметры паспорта прочности для угля, мрамора из месторождения Коелга (Урал), каменной соли из Армении, среднезернистого ожелезненного песчаника, аргиллита из ш. Обуховская-Западная (Донбасс), диабаз из района строительства Братской ГЭС, темно-зеленого талькохлорита из месторождения Сиг-Озеро, кристаллической зернистой структуры карарского мрамора [45], известняка [32], песчаника [18], алевролита [15],

на двойной срез со сжатием мелкозернистого и крупнозернистого песчаника [15] и др.

Важное практическое значение имеют прочностные данные разрушенных и измельченных пород и каменных материалов. Ниже приводятся результаты определения параметров прочности, выполненные по данным испытаний в стабилOMETрах измельченного антрацита [57], дробленого крупно диорита [58] и мелко дробленого известняка, у которого швы между кусками заполнены мергелем [59].

Расчеты показали, что корреляционное отношение оказалось близким 0,98...1.0, что свидетельствует о высоком соответствии полученных значений прочности измельченного антрацита по аналитической теории и экспериментальных данных.

В таблице 4.1 приведены итоговые результаты обработки экспериментальных данных по объемным испытаниям горных пород в стабилOMETрах, определению по этим данным параметров паспорта прочности согласно аналитической теории и сопоставление экспериментальных и теоретических данных в виде корреляционных отношений.

На рис. 4.3 показаны огибающие предельных кругов напряжений диаграммы Мора по экспериментальным данным для горных пород, а на рис. 4.4 - для дробленых пород (номер кривой соответствует номеру породы в таблице 4.1).

В результате выполненных исследований можно заключить, что аналитическая теория прочности способна достаточно точно и достоверно описывать реальные паспорта пород, что доказывают высокие значения корреляционных отношений (0,95...0,99), полученные после обработки 19 комплексных испытаний пород в стабилOMETрах. Большинство реальных паспортов прочности горных пород имеют различный параметр хрупкости  $\alpha$ , который изменяется в пределах от 0,27 (для крупнозернистого песчаника №17) до 0,96 (для дробленого диорита № 18).

Необходимо обратить внимание на последний столбец табл. 4.1, где приведен коэффициент корреляции, его значение может вызвать сомнение у специалистов, которые практически занимались испытаниями пород, когда часто разброс данных достигает 10-20%. Однако следует иметь в виду, что при испытаниях в стабилOMETре образцы отбираются весьма тщательно из одного и того же материала, а испытания всех идентичных образцов проводят по одинаковой методике с минималь-

ными отклонениями. Поэтому теснота связи, которую характеризует корреляционное отношение, оказалась значительно выше, чем

Таблица 4.1 – Итоговые результаты обработки экспериментальных данных по объемным испытаниям горных пород

| Тип породы,<br>источник       | Число образцов | Параметры прочности |                |          | Корреляц. отношение |
|-------------------------------|----------------|---------------------|----------------|----------|---------------------|
|                               |                | $\sigma_0$ , МПа    | $\tau_0$ , МПа | $\alpha$ |                     |
| 1. Алевролит [56]             | 5              | 7,34                | 29,1           | 0,60     | 0,99                |
| 2. Уголь [56]                 | 5              | 7,178               | 16,2           | 0,50     | 0,98                |
| 3. Мрамор [56]                | 6              | 0,38                | 4,34           | 0,54     | 0,99                |
| 4. Каменная соль [56]         | 5              | 10,44               | 9,26           | 0,78     | 0,99                |
| 5. Песчаник [56]              | 8              | 0,54                | 6,81           | 0,49     | 0,99                |
| 6. Аргиллит [56]              | 3              | 0,57                | 7,37           | 0,49     | 0,99                |
| 7. Диабаз [56]                | 5              | 0,66                | 9,49           | 0,52     | 0,99                |
| 8. Талькохлорит [56]          | 5              | 3,70                | 16,70          | 0,45     | 0,99                |
| 9. Карарский мрамор 1[45]     | 6              | 0,33                | 6,27           | 0,5      | 0,99                |
| 10. Карарский мрамор 2[45]    | 8              | 0,55                | 7,95           | 0,52     | 0,99                |
| 11. Известняк [32]            | 52             | 3,90                | 9,23           | 0,58     | 0,94                |
| 12. Песчаник [18]             | 15             | 0,30                | 3,39           | 0,56     | 0,99                |
| 13. Алевролит [15]            | 5              | 7,90                | 12,1           | 0,45     | 0,97                |
| 14. Песчаник мелкозерн. [15]  | 8              | 3,86                | 32,5           | 0,38     | 0,91                |
| 15. Песчаник мелкозерн. [15]  | 11             | 17,50               | 39,3           | 0,49     | 0,97                |
| 16. Песчаник крупнозерн. [15] | 9              | 4,95                | 40,1           | 0,27     | 0,95                |
| 17. Антрацит измельчен. [47]  | 6              | 0,00                | 0,00           | 0,87     | 1,0                 |
| 18. Диорит дробленый [48]     | 6              | 0,127               | 0,1            | 0,96     | 0,99                |
| 19. Известняк дробленый [49]  | 12             | 0,04                | 0,1            | 0,67     | 0,99                |

при испытании образцов по обычным методикам. Попутно следует отметить, что для практических целей точность определения прочностных свойств пород в пределах 10-15% может считаться вполне удовлетворительной.

При обработке паспортов горных пород, полученных в результате лабораторных испытаний в стабилометрах, с особой очевидностью становится ясным, что некорректно строить паспорта прочности горных пород лишь по той части огибающей, которая расположена в области

напряжений сжатия ( $\sigma > 0$ ), поскольку в этом случае полученные экспериментальные точки можно описать с высокой точностью целым семейством разных огибающих, причем наилучшая из них по точности (по корреляционному отношению) не всегда правильно отражает показатели когезии (особенно завышена оказывается когезия разрыва), а параметр хрупкости  $\alpha$ , значительно и неоправданно превосходит граничное значение 0,5 и достигающий значения, почти равного 1. В этом можно убедиться, анализируя по табл. 4.1 данные показателей паспорта прочности для алевролита, угля, каменной соли и др. (№ 1, 2, 4 и др.).

В то же время те породные образцы, которые были методически правильно испытаны и для которых были экспериментально получены данные о когезии отрыва или пределе прочности на одноосное растяжение, особенно важной для характеристики общей характеристики прочности породы, показали достаточно достоверные значения параметра хрупкости  $\alpha$  в пределах 0,27- 0,45. При этом оказалось, что чем более мелко измельчен образец породы, тем выше его параметр хрупкости, а огибающая прочности приближается к линейной зависимости;

Те пробы пород, при испытаниях которых не определялась когезия отрыва, характеризуются аномально высокими параметрами хрупкости, когда  $\alpha$  становится почти равным 1, и чрезвычайно завышенными значениями когезии отрыва. Так, для проб 3 (мрамор), 5 (песчаник), 6 (аргиллит), 7 (диабаз) из источника [46], а также пробы 9, 10 (карарский мрамор) и 13 (песчаник) когезия разрыва оказалась нереально высокой.

Эти данные заставляют нас поставить под сомнение целесообразность и корректность проведения экспериментальных исследований без обязательных с нашей точки зрения испытаний пород на растяжение, позволяющих более точно определить когезию разрыва.

Таким образом, аналитическая теория прочности обеспечивает высокую точность описания паспортов прочности большинства материалов, при этом позволяя выявить недостаточно корректные с позиции методики испытаний или неполные экспериментальные результаты.

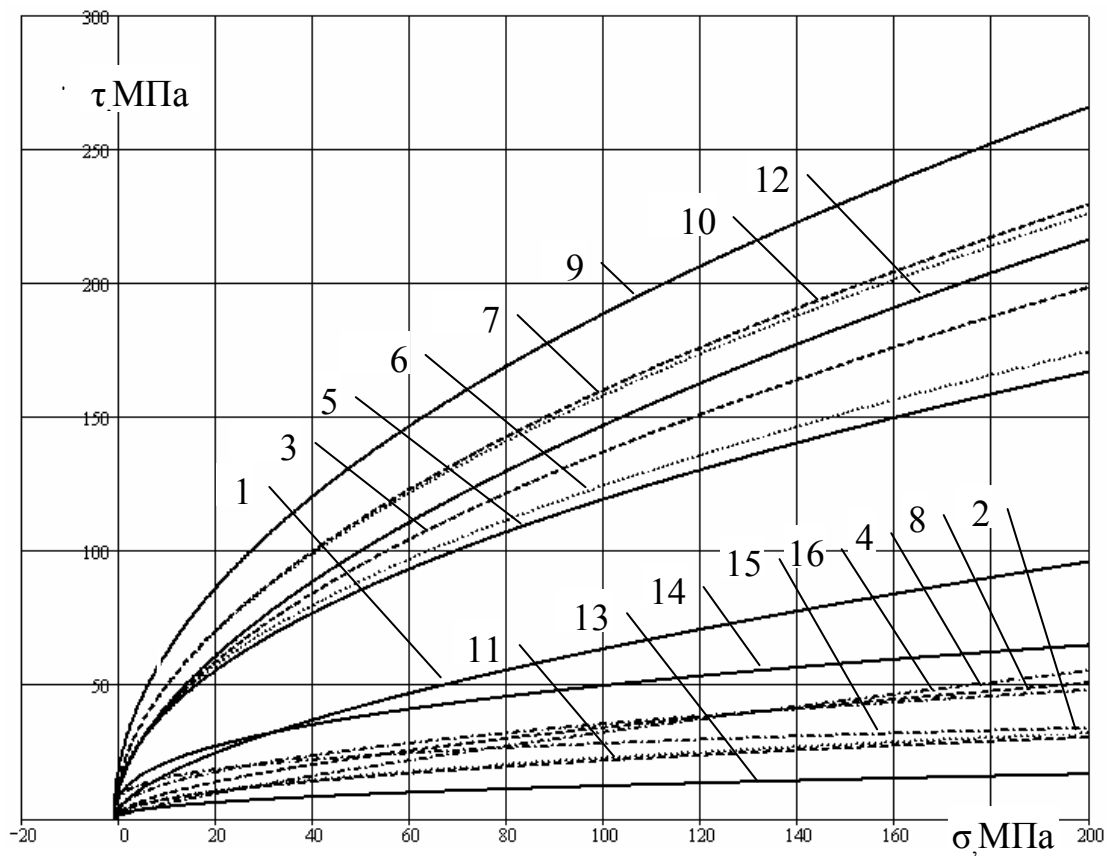


Рис. 4.3 – Паспорт прочности на диаграмме Мора для горных пород (номер кривой соответствует номеру в табл. 4.1)

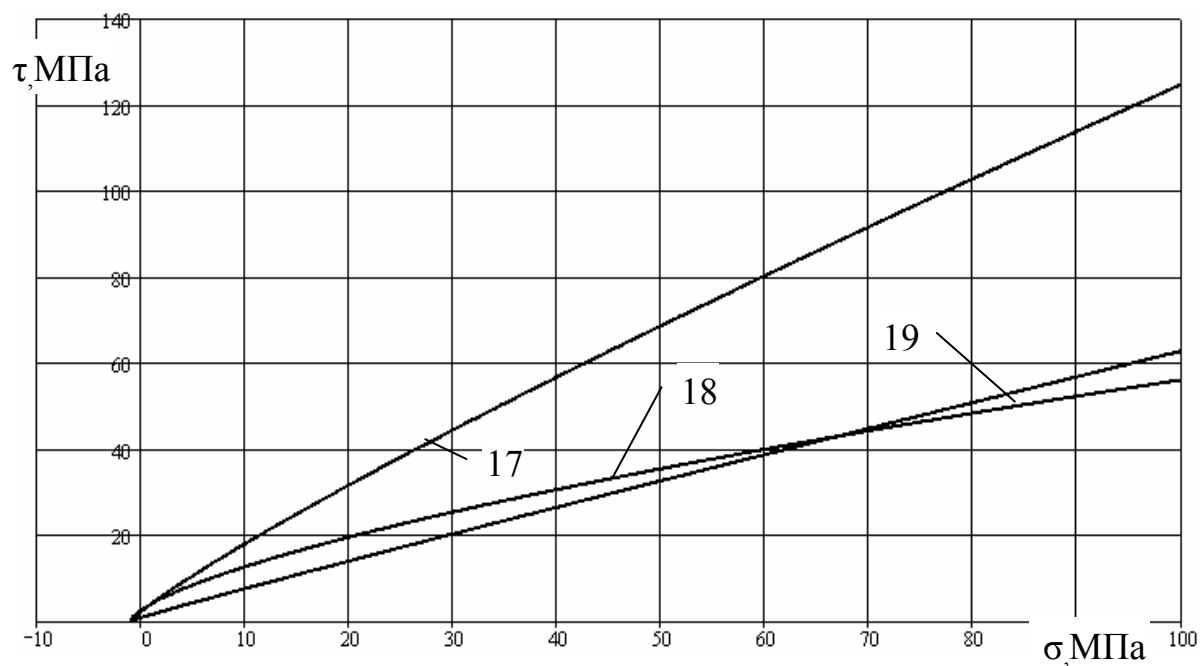


Рис. 4.4 – Паспорт прочности на диаграмме Мора для дробленых горных пород (номер кривой соответствует номеру в табл. 4.1)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполненных исследований по созданию и обоснованию аналитической теории прочности материалов (горных пород):

- 1) проведено рассмотрение и дан критический анализ существующих теорий прочности, благодаря чему удалось выяснить наиболее существенные тенденции их развития и наиболее острые проблемы, которые не были решены до настоящего времени;
- 2) показано, что основной особенностью в механизме разрушения материалов является наличие в трещинах сдвига, наряду с сухим, жидкостного трения, что кардинально меняет прочностные свойства материала;
- 3) доказано, что промежуточная компонента тензора напряжений не влияет на условия разрушения однородного материала на главных сдвиговых площадках, поэтому условие прочности должно с полным основанием описывать лишь разрушение на наиболее опасно ориентированной площадке разрушения;
- 4) описание процесса разрушения, основанное на рассмотрении реального механизма роста трещин должно производиться в терминах нормальных и касательных напряжений на площадке разрушения, а не с помощью главных напряжений;
- 5) сформулированы общетеоретические требования к критериям прочности и формальные принципы построения новой теории прочности, которые дают основу для оценки правильности предлагаемых теоретических построений и возможность их проверки даже на ранних стадиях создания;

- 6) впервые предложена аналитическая теория прочности, которая кардинальным образом отличается от существующих новым рассмотрением механизма разрушения с участием сухого и жидкостного взаимодействия материала на площадках разрушения, а также необходимостью составления и решения аналитического уравнения прочности для каждого материала;
- 7) впервые составлены и решены дифференциальные уравнения прочности для структурно сложных материалов и горных пород, в частности, содержащих открытые и закрытые трещины. Исследованы закономерности изменения паспортов прочности горных пород с различным сочетанием открытых и закрытых трещин;
- 8) сформулированы некоторые классы прикладных (технических и технологических) задач, которые ранее не поддавались решению и которые можно достаточно просто решить и обобщить в рамках разработанной аналитической теории прочности;
- 9) впервые разработаны теоретические основы геомеханики структурно-неоднородных сред (массивов горных пород), решена проблема описания масштабного эффекта на основе введения новых понятий сплошности и представительного структурного блока.

Для выполнения расчетов, необходимых в инженерной практике, разработаны компьютерные модели прочности, основанные на реализации в среде MathCAD алгоритма решения прямых и не прямых задач прочности горных пород, и выполнены численные исследования прочности горных пород.

В результате выполненных исследований по разработке теории прочности структурно-неоднородных пород и экспериментальной проверки аналитической



теории прочности горных пород получены следующие закономерности:

- угол внутреннего трения ввиду его изменчивости нельзя считать показателем прочностных свойств горных пород, и он должен быть изъят из расчетной практики, а ему на смену должен прийти параметр хрупкости, обобщающий феномен внутреннего трения, обладающий стабильностью и отражающий сущность процессов разрушения в материале;
- за счет введения показателя сплошности  $\psi_i$  и аналитической модели достоверно определена прочность структурно неоднородных материалов, что ранее было невозможно с позиций традиционных алгебраических подходов. В результате четкой интерпретации описания сложных структур появилась необходимость пересмотра методики натурных и экспериментальных исследований по исследованию трещиноватости и неоднородности горных пород и массивов;
- уравнения прочности неоднородного материала (зернистых пород) дают возможность значительно сократить объем длительных и сложных лабораторных и натурных испытаний горных пород и массивов, т.к. их можно заменить расчетами композитов из ингредиентов с известными механическими свойствами (в том числе с учетом трещин и ослабленных контактов);
- введена новая классификация пород по прочностным свойствам, учитывающая их хрупкость и степень нарушенности;
- впервые выполнена теоретическая оценка масштабного фактора, предложены аналитические зави-

симости по его определению, установлено явление зависимости масштабного фактора от напряженного состояния материала.

Применение аналитической теории прочности дает возможность повысить уровень расчетных обоснований проявлений горного давления в горных выработках, принимать более обоснованные расчетные схемы устойчивости породных обнажений, улучшить прогнозирование поведения горных пород при технологической деятельности человека в недрах.

Полученные результаты научных исследований могут быть полезны при разработке методов лабораторных и полевых испытаний горных пород, при ведении расчетов и прогнозировании горного давления вокруг капитальных и подготовительных выработок, на новой теоретической базе создать научные основы геомеханики взрыва.

Конкретно результаты проведенных исследований могут быть реализованы:

- в исследовательских организациях - для теоретического и экспериментального обоснования и разработки методов испытаний горных пород, исследования и расчетов широкого класса геомеханических процессов в недрах;
- в проектных институтах - как основа для разработки нормативных документов по управлению состоянием горного массива;
- в промышленных организациях - для получения базы данных о свойствах массива горных пород, нужных при строительстве новых и эксплуатации действующих горных предприятий;

— в вузах - в виде разделов учебников по курсам «Физика горных пород», «Механика подземных сооружений», «Сопротивление материалов», «Разрушение горных пород» и др.

В чем же можно усмотреть недостатки предложенной аналитической теории прочности? По мнению автора, в этой теории не удалось избежать ряда недостатков, которые присущи всем предыдущим теориям прочности, поскольку она разрабатывалась на основе квазиклассических принципов, когда во главу угла ставилась задача создания критерия разрушения. Поэтому остались без ответа важнейшие вопросы запредельного деформирования, изменения структуры материала и развитие деформаций во времени в процессе нагружения, задача объединения с единых методических позиций теории упругости, пластичности и ползучести. Эти проблемы могут быть решены только в рамках реономной микромеханики деформирования и разрушения материалов, которая оперирует не статическими дифференциальными уравнениями, как в аналитической теории прочности, а системами кинетических дифференциальных уравнений, отражающих изменение во времени особенности структурного строения материалов и их напряженно-деформированное состояние. Эти проблемные направления будут освещены в следующей книге автора.

Актуальными задачами использования аналитической теории прочности практической направленности можно считать, в частности, разработку теории взрывного, динамического и импульсного разрушения материалов, создание научных основ теории резания с использованием различных физических воздействий (ме-

ханического, гидравлического, акустического, лазерного и др.), исследование долговременного механического поведения материалов в различных условиях температурного и циклического нагружения, что особенно важно для решения конструкционных проблем современного машиностроения (турбины, двигатели, трубопроводы и пр.). Как представляется автору, эти перспективные научные направления дают широкое поле деятельности для энергичных и инициативных молодых исследователей, работающих в области механики деформируемого твердого тела и решающих прикладные задачи науки и технологии.

## *Литература*

1. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела/ч.1. – М.: Наука, 1975. – 832 с.
2. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
3. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов.– М.: Машиностроение, 1974. – 472 с.
4. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел./Пер. с англ. под ред. В.С. Ивановой. – М.: Металлургия, 1971. – 264 с.
5. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел./Пер. с англ. под ред. Г.С. Шапиро, т.1. – М.: Иностранная литература, 1954. – 647 с.
6. Макклиток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. Пер. с англ. под ред. Е.М. Морозова и Б.М. Струнина. – М.: Мир, 1970. – 443 с.
7. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев.: Наукова думка, 1968. – 246 с.
8. Филоненко-Бородич М.М. Механические теории прочности. – М.: МГУ, 1961.- 84 с.
9. Ионов В.Н., Селиванов В.В. Динамика разрушения деформируемого твердого тела. – М.: Машиностроение, 1987. – 272 с.
10. Ягн Ю.И. Новые методы расчета на прочность. – Вестник инженеров и техников, 1931, № 6. - С. 27-37.
11. Баландин П.П. К вопросу о гипотезах прочности. – Вестник инженеров и техников, 1937, № 1. - С. 70-78.
12. Миролубов И.Н. К вопросу об обобщении теории прочности октаэдрических касательных напряжений на хрупкие материалы. – Труды ЛТИ, 1953, № 25. - С. 56-64.

13. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наукова Думка, 1969. – 123 с.
14. Руппенейт К.В., Либерман Ю.М. Введение в механику горных пород. – М.: Госгортехиздат, 1960. – 356 с.
15. Руппенейт К.В. Механические свойства горных пород. – М.: Углетехиздат, 1954. – 289 с.
16. Протодяконов М.М. Обобщенное уравнение огибающих к предельным кругам напряжений Мора. – Сб. исследование физико-механических свойств горных пород применительно к задачам управления горным давлением. – М.: АН СССР, 1962. - С. 82-89.
17. . Bieniawski Z.T. Estimating the Strength of Rock Materials. – J. S. Afr. Min. Metall., Vol. 74, 1974, pp. 312-320.
18. Hoek E, Brown E.T. Practical estimates of rock mass strength. Int J. Rock Mech Min Sci 1997; 34(8):pp. 1165–86.
19. Шашенко А.Н., Пустовойтенко В.П. Расчет несущих элементов подземных сооружений. – Киев:, Наукова Думка, 2001. – 168 с.
20. Екобори Т. Научные основы прочности и разрушения материалов/ Пер. с яп. – Киев: Наукова думка, 1978. – 352 с.
21. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 854 с.
22. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов. – К.: Наукова думка, 1988. – 488 с.
23. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наукова думка, 1991. – 416 с.

24. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Элементы теории пластичности та міцності. Львів: Світ, 1999. – 945 с.
25. Карзов Г.П., Марголин Б.З., Швецова В.А. Физико-механическое моделирование процессов разрушения. – СПб.: Политехника, 1993. - 391 с.
26. Литвинский Г.Г. Обобщенный паспорт прочности горных пород/ Науковий вісник НГАУ. – Дніпропетровськ: Національна гірнича академія України НГАУ, 1995. – С. 85-89 .
27. Регель В.Р., Слуцкий А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. – М.: Наука, 1974. – 560 с.
28. Litvinsky G.G. The principles of reonomical micromechanics and new theory of strength of rocks and rocks massifs/ Proceeding: Mechanization and Automation in Mining and Energetic. – VI Intern. Symp., Beograd, 2002, - pp. 23-29.
29. Литвинский Г.Г. Реономная микромеханика и дифференциальные уравнения прочности/ Вестник НТУ КПИ. – К.: НТУУ «КПИ», 2001. – С. 30-37.
30. Воробьев А.А., Тонконогов М.П., Векслер Ю.А. Теоретические вопросы физики горных пород. – М.: Недра, 1977. -150 с.
31. Пул Ч. Справочное руководство по физике: фундаментальные концепции, основные уравнения и формулы. – М.: Мир, 2001. -461 с.
32. M. Alber and J. Heiland: Investigation of Limestone Pillar Failure. Rock Mech. Rock Engng. (2001) 34 (3), 167-186.
33. . Рац М.В., Чернышев С.В. Трещиноватость и свойства трещиноватых горных пород. – М.: Недра, 1970.- 164 с.

34. Фисенко Г.Л. Предельные состояния горных пород вокруг горных выработок. – М.: Недра, 1976.- 272 с.
35. Руководство по изучению состояния шахтных полей при подземной разработке угольных месторождений. – Л.: ВНИМИ, 1967.- 107 с.
36. Hodgson R.A. Classification of structures on joint surfaces. – Amer. J. of Science, 259, N 7, 1961, - pp.493-502.
37. Кузнецов Г.Н. Предельные состояния твердых горных пород с учетом пространственной ориентации естественных поверхностей ослабления. – Л.: ВНИМИ, труды №43, 1961.
38. Кузнецов Г.Н. Графические методы оценки предельных состояний трещиноватого массива вокруг горных выработок/ В сб. Совр. проблемы мех. гор. пород. – Л.:Наука, 1972.
39. Ардашев К.А., Шик В.М. О предварительном расчете нарушения сплошности пород при проведении горных выработок. . – Л.: ВНИМИ, труды №68, 1968.
40. Литвинский Г.Г. Учет структурной нарушенности горных пород при оценке устойчивости горных выработок. – Коммунарск: КГМИ, Отчет № 71045753 по х/т № 598. – 340 с.
41. Bray J.W. A study of jointed and fractured rock. – Felsamechanic und Ingeniurgeologie, vol. 2 – 3,4. – Wien: 1967, pp. 143-159
42. Müller L. Geomechanische Auswertung gefugekundlicher Details. – Geologie und Baundwissen , J 24, № 1, 1959, pp. 32-47
43. Malina H. The numerical determination of stresses and deformations in rock taking into account discontinuities. – Rock Mechanics, 1970, № 2. – p. 107-118



44. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. - М.: Наука, 1982. – 352 с
45. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород/ под ред. Н.В. Мельникова, В.В. Ржевского, М.М. Протодяконова. - М.: Недра, 1975. – 279 с.
46. Прочность и деформируемость горных пород/ Ю.М. Карташов, Б.В. Матвеев, Г.В. Михеев, А.Б. Фадеев. – М.: Недра, 1979. – 269 с.
47. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика подземных сооружений. - М.: Недра, 1984. – 415 с.
48. А.Н. Шашенко А.Н., Сдвижкова Е.А., Кужель С.В. Масштабный эффект в горных породах. – Д.: АРТ-Пресс, 2004. – 132 с.
49. Bažant, Z. P. & Yu, Q. (2004) Proceedings of the Fifth International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures (FraMCoS-5), eds. Li, V. C., Leung, K. Y., Willam, K. J. & Billington, S. L. (Intern. Assoc. of Fracture Mechanics of Concrete Structures, Evanston, IL), pp. 153–162.
50. Фисенко Г.Л. Расчет предельных состояний пород в вокруг выработок и в целиках. – ФТПРПИ, 1972, № 6. – С. 3-10.
51. Чирков С.Е. Влияние на прочность и деформируемость горных пород напряженного состояния и масштабного эффекта./Дисс. д-ра техн. наук. – М.: ИГД им. А.А. Скочинского, 1974. – 482 с.
52. Ямщиков В.С. Методы и средства исследования и контроля горных пород и массивов. – М.: Недра, 1982. – 386 с.
53. Литвинский Г.Г. Структура и напряженное состояние микродефектного материала (горной породы) / В сб.: Ground Control in Mining. – Донецк: ДонГТУ, 2000. - С. 28-48.

54. Литвинский Г.Г. Новая теория прочности горных пород/ В межвед. сб. науч. трудов ИГТМ НАНУ вып. 40 - Геотехнічна механіка. – Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2002. С. 3-12
55. Garry G. Litvinsky. Rock Strength – New Concept And Problem of Solution/ Geotechnika I budownictwo specjalne – XXVII Zimowa Szkoła Mechaniki Górotworu, Zakopane,. – Krakow: AGH, 2004. – pp. 143-150/
56. Ставрогин А.Н. Атлас механических свойств горных пород. - Л., изд. ВНИМИ, 1968. - 90 с.
57. Billam, J. Some Aspects of the Behavior of Granular Materials at High Pressures, Stress strain behavior of Soils. Roscoe memorial symposium, 1971, pp. 69-80.
58. Marsal, R.J., Mechanical properties of rockfill, Embankment Dam Engineering, Casagrande Memorial Volume, Hirschfield & Poulos. ed. John Willey, 1973, pp. 109-200.
59. Bernaix, J., Etude Geotechnique de la Roche de Malpasset, Dunod, Paris, 1967 – p. 236.

## К 70-ЛЕТИЮ ПРОФ. ЛИТВИНСКОГО Г.Г.

Известный ученый в области горной геомеханики, физики горных процессов, создания новой горной техники и технологии, доктор технических наук (1988), профессор (1989), Заслуженный деятель науки и техники Украины (1991), действительный член Академии Строительства Украины и Академии Горных наук, эксперт комиссии по горным наукам Министерства Образования и Науки Украины, член Высшей Аттестационной комиссии (ВАК) Украины. Был членом специализированных советов по защите докторских диссертаций в МГГУ (Москва), ДНТУ (Донецк), ДонГТУ, входит в состав редколлегии ряда научных горных изданий.



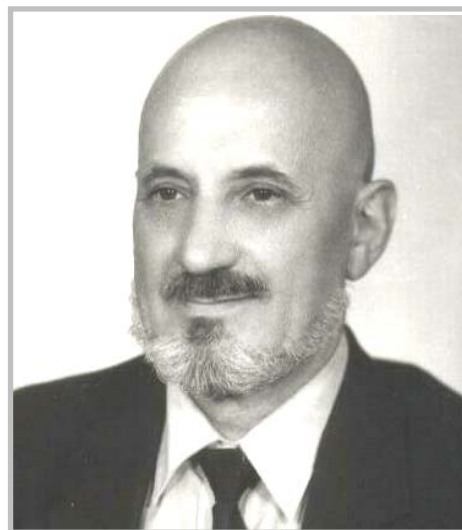
16 лет – учащийся Ростовского  
н/Д горного техникума

(до 1969 г.), затем доцент (1969), профессор, заведующий кафедрой «Строительная геотехнология и горные сооружения» Донбасского государственного технического университета (ДонГТУ) с 1978г по настоящее время.

Кандидатскую диссертацию «Способы и средства крепления выработок монолитным бетоном» защитил в Донецком политехническом институте, (1967 г., руководитель д.т.н., проф. Ю.З. Заславский, оппо-

Родился в г. Воронеже в семье военнослужащего 8 января 1939. Окончил с отличием горный техникум (г. Ростов-на-Дону, 1957), Донецкий политехнический институт (г. Донецк, 1962), аспирантуру (Донуги, 1967), докторантуру (КГМИ, 1977). Будучи студентом-отличником, получал именную Ворошиловскую стипендию, проводил большую общественную работу, был членом райкома комсомола, председателем секции туризма-альпинизма института ДПИ. По окончании института работал горным мастером в тресте «Донецкшахтопроходка» (1963), старшим научным сотрудником в Донуги

ненты д.т.н., проф. М.Н. Гелескул, д.т.н., проф. С.М. Липкович, к.т.н. доц. В.В.Орлов) по специальности «Шахтное и подземное строительство». Докторскую диссертацию «Разработка геомеханических параметров и способов создания породонесущих конструкций из разгруженных взрывом и упрочненных пород» защитил в 1988г. (ИГТМ АН УССР, г.Днепропетровск. Оппоненты д.т.н., проф. К.А. Ардашев, Б.А. Картозия, О.В. Колоколов) по специальностям «Физические процессы горного производства» и «Разработка месторождений полезных ископаемых».



65 лет – профессор  
ДонГТУ

## **Основные научные результаты**

### ***Теоретические и фундаментальные исследования:***

Реономная микромеханика деформирования и разрушения материалов, которая объясняет и предсказывает основные особенности механического поведения материала во времени путем решения системы кинетических дифференциальных уравнений роста и залечивания микродефектов. Объединяет с единых методических позиций теории ползучести и пластичности путем описания роста и залечивания микро трещин во времени.

Аналитическая теория прочности с критерием прочности в дифференциальной форме и с новыми физически содержательными прочностными показателями материала (адгезиями сдвига, разрыва и параметром хрупкости). Впервые позволяет учитывать структурную нарушенность, трещиноватость, структурные дефекты и микронеоднородность материалов (в том числе горных пород).

Структурная геомеханика неоднородных массивов, в рамках которой предложена новая физическая модель масштабного эффекта, основанная на теории сплошности. Раскрыта физическая сущность и закономерности изменения прочности структурно неоднородных массивов.

Новая теория горного давления в подземных выработках, основанная на впервые предложенных двух фундаментальных закономерностях потери устойчивости выработок в процессе их формоизменения при движении фронта хрупкого разрушения, доказывает и объясняет множественность форм проявлений горного давления.

Решением неосесимметричного класса упруго-пластических задач установлены закономерности развития зоны неупругих деформаций вокруг выработок с учетом возмущающего воздействия основных неосесимметричных факторов горного давления.

Основы геомеханики подземного взрыва, где впервые на основе аналитической теории прочности и новых базовых гипотез о формировании камуфлета и воронки взрыва поставлены и решены порождающие задачи подземного взрыва для единичных и взаимодействующих и точечных и линейных зарядов.

### ***В области лабораторного и натурного эксперимента разработаны:***

Новые способы и средства испытаний горных пород и материалов, методики и приборы (портативный прибор экспресс испытаний горных пород ППЭИ на образцах полуправильной и неправильной формы, комплексный метод испытаний пород в виде необработанных кернов и др.)

Методы и приборы интроскопии массива горных пород по определению его структурной неоднородности (реометрический метод, метод измерения диэлектрической проницаемости массива и др.).

Ускоренная методика шахтных инструментальных наблюдений проявлений горного давления в подвижной системе координат (Эйлера) фронта очистных работ, приборы определения нагрузки на крепь и смещений пород.

Моделирование физических процессов горного производства на аналоговых и физических моделях (методом ЭГДА, стенд моделирования взрыва, стенды испытания моделей крепи и т.д.)

### ***Технологические и конструкторские исследования и разработки:***

Новая научная доктрина «Шахта XXI Века» - горная техника и технология революционного улучшения показателей строительства и

эксплуатации шахт, в том числе при отработке тонких и сверхтонких пластов

Проходческий комбайн «MIR» фронтального действия со шнековым исполнительным породоразрушающим органом, обеспечивающий безлюдное автоматизированное сооружение выработок со скоростью до 100 м/сут.

Агрегат фронтальный шнековой выемки АФШВ для безлюдной автоматизированной добычи угля из тонких и сверхтонких пластов от 0,4 до 1,2 м производительностью 4...7 тыс. т/сут.

Универсальная схема вскрытия, подготовки и система разработки для безлюдной высокопроизводительной (5-7 тыс. т/сут) безцеликовой выемки тонких и сверхтонких угольных пластов.

Перспективное научное направление в области стационарных горных машин – бесканатный подъем и беструбный водоотлив производительностью 1000 м<sup>3</sup>/час.

Прогрессивные высокопроизводительные схемы околоствольного двора и генерального плана поверхности шахты нового технического уровня

Активные способы и средства обеспечения устойчивости подземных выработок активной разгрузкой и последующим упрочнением горных пород (борьба с пучением почвы горных выработок АРПУ, породонесущие конструкции крепи «Монолит» различных модификаций, бутовая полоса с предварительным распором, и др.)

Рамные стальные конструкции крепи, узлы податливости и межрамные ограждения, активные способы повышения несущей способности крепи путем управления распределением усилиями в конструкции (элементы усиления, предварительное напряжение канатной стяжкой, расклинкой и др.).

### ***Работа по подготовке кадров***

Проф. Г.Г. Литвинский осуществляет подготовку кадров высшей квалификации, руководит аспирантурой и докторантурой. Под его научным руководством по специальностям «Шахтное и подземное строительство», «Разработка месторождений полезных ископаемых», «Физические процессы горного производства» защищено 12 кандидатских диссертаций (С.А.Курман, Буй Чи Шоат, С.Г.Коробкин, В.Н.Мусиенко, В.Д.Троян, А.И.Мележик, В.А.Касьянов, Г.И.Гайко, Н.В.Малеев, Фесенко Э.В. и др.), два докторанта получили ученую степень доктора

технических наук (Г.И.Гайко, Г.В.Бабиюк). Он автор около 370 научных работ (160 без соавторов), в числе которых 3 монографии, около 40 методических разработок для высшей школы. Имеет более 150 изобретений и патентов (70 без соавторов).

В процессе своей научно-исследовательской деятельности и как член учебно-методической комиссии Минобразования СССР посетил под землей более 100 горных предприятий, рудников и шахт Донбасса, Кривбасса, Кузбасса, Дальнего Востока, Казахстана, Грузии, Эстонии, Средней Азии, Якутии, Урала, Кольского полуострова, Польши и др.

В университете ДонГТУ подготовил ряд оригинальных циклов лекций по дисциплинам «Конструкции и расчет горной крепи», «Тенденции и закономерности развития горной техники и технологии», «Теория и практика управления горным давлением», «Механика подземных сооружений» и др.

Поддерживает научные связи с коллегами из России, Польши, Вьетнама, Болгарии, Канады, Югославии, Словакии и др. Полный кавалер знака «Шахтерская Слава», неоднократно награжден золотыми и серебряными медалями выставок ВДНХ СССР и УССР и др.

## ИЗОБРЕТЕНИЯ ПРОФ. Г.Г. ЛИТВИНСКОГО

### по определению прочности горных пород

| Название                                                                            | № изобретения, год публикации | ФИО соавторов                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1                                                                                   | 2                             | 3                              |
| 1. Устройство для закрепления образцов горных пород при испытаниях их на растяжение | А.с. № 467185 (СССР), 1975    | Курман С.А.                    |
| 2. Устройство для испытания горных пород на сжатие                                  | А.с. № 554409 (СССР), 1977    | Курман С.А.                    |
| 3. Устройство для испытаний горных пород на сжатие                                  | А.с. № 599190 (СССР), 1977    | Курман С.А.<br>Малеванный В.В. |
| 4. Способ испытания горных пород на объемное сжатие.                                | А.с. № 629341 (СССР), 1978    | Курман С.А.                    |
| 5. Прибор для механических испытаний горных пород                                   | А.с. № 641098 (СССР), 1978    | Курман С.А.                    |
| 6. Пресс для испытания материалов                                                   | А.с. № 665240 (СССР), 1979    | Курман С.А.<br>Маркевич И.А    |
| 7. Устройство для испытания образцов горных пород на срез со сжатием                | А.с. № 870706 (СССР), 1981    | Курман С.А.                    |
| 8. Устройство для испытания горных пород на сжатие                                  | А.с. № 973839 (СССР), 1982    | Курман С.А.                    |
| 9. Устройство для испытания образцов горных пород на сжатие                         | А.с. № 987100 (СССР), 1983.   | Курман С.А.                    |
| 10. Устройство для испытания пород на растяжение                                    | А.с. № 1046510 (СССР), 1983   | -                              |
| 11. Прибор для испытания образцов при трехосном сжатии                              | А.с. № 1054724 (СССР), 1983   | -                              |
| 12. Устройство для определения прочности хрупких материалов на растяжение           | А.с. № 1102945 (СССР), 1984   | Курман С.А.                    |
| 13. Устройство для определения трещиноватости горных пород                          | А.с. № 1157231 (СССР), 1985   | Троян В.Д.<br>Мележик А.И.     |
| 14. Устройство для прочностных испытаний горных пород                               | А.с. № 1190236 (СССР), 1985   | Курман С.А.                    |
| 15. Прибор для механических испытаний горных пород                                  | А.с. № 1209865 (СССР), 1986   | Троян В.Д.<br>Курман С.А.      |
| 16. Способ определения прочностных горных пород                                     | А.с. № 1219517 (СССР), 1986   | Курман С.А.                    |
| 17. Стабилометр                                                                     | А.с. № 1269002 (СССР), 1986   | Курман С.А.<br>Присташ В.В.    |



|                                                                            |                                    |                               |
|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|
| 18. Способ испытания материалов.                                           | А.с. № 1298586<br>(СССР), 1987     | Курман С.А.<br>Присташ В.В.   |
| 19. Экспресс-пробник сцепления набрызгбетона с массивом                    | А.с. № 1293355<br>(СССР), 1987     | -                             |
| 20. Индентор                                                               | А.с. № 1293337<br>(СССР), 1987     | -                             |
| 21. Датчик напряжений                                                      | А.с. № 1305365<br>(СССР), 1975     | -                             |
| 22. Зонд для определения трещиноватости массива горных пород               | А.с. № 1317124<br>(СССР), 1987     | -                             |
| 23. Способ определения прочности затампонируемых горных пород              | А.с. № 1335699<br>(СССР), 1987     | Курман С.А.                   |
| 24. Скважинный интроскоп горных пород                                      | А.с. № 1376754<br>(СССР), не публ. | Касьянов В.А.                 |
| 25. Прибор для испытания горных пород.                                     | А.с. № 1446303<br>(СССР), 1988     | Буй Чи Шоат                   |
| 26. Устройство для определения трещиноватости горных пород.                | А.с. № 1451272<br>(СССР), 1989     | Касьянов В.А.<br>Куленич Б.И. |
| 27. Радиоволновой интроскоп массива горных пород.                          | А.с. № 1450351<br>(СССР), 1989     | В.А.Касьянов                  |
| 28. Устройство для поперечного раскола породных кернов.                    | А.с. № 1610010<br>(СССР), 1990     | -                             |
| 29. Прибор для испытания горных пород расколом.                            | А.с. № 1613609<br>(СССР), 1990     | Буй Чи Шоат                   |
| 30. Электроемкостный зонд                                                  | А.с. № 1631482<br>(СССР), 1991     | Касьянов В.А.                 |
| 31. Прибор-пробник для набрызгбетона                                       | А.с. № 1634790<br>(СССР), 1991     | -                             |
| 32. Способ испытания кернов на раскол.                                     | А.с. № 1640582<br>(СССР), 1991     | -                             |
| 33. Устройство для испытания горных пород на сжатие                        | А.с. № 1652549<br>(СССР), 1991     | Курман С.А.                   |
| 34. Способ определения неоднородностей массива горных пород                | А.с. № 1794253<br>(СССР), 1992     | Касьянов В.А.                 |
| 35. Пристрій для іспиту сипучого матеріалу на одноосьове розтягання «ІПОР» | Декл. патент України 13715, 2006.  | Шульгін П.М.<br>Касьянов В.А. |
| 36. Датчик для вимірювання швидкості деформації середовища SVSR-1          | Декл. патент України 23734, 2007   | Шульгін П.М.<br>Касьянов В.А. |
| 37. Прибор для испытаний механических свойств горных пород                 | А.с. № 1782283<br>(СССР), 1992     | Курман С.А.                   |

## **ПУБЛИКАЦИИ ПРОФ. Г.Г. ЛИТВИНСКОГО**

### **по проблемам прочности горных пород**

1. Литвинский Г.Г., Касьянов В.А. Основы геофизического мониторинга горного массива измерением диэлектрической проницаемости пород. - Проблемы и перспективы освоения подземного пространства городов. – Днепропетровск: - Сб. науч. трудов НГА Украины. – Днепропетровск: РИК НГАУ, 1998, с.197-202
2. Литвинский Г.Г. Понятие поврежденности в микромеханике разрушения пород. - В сб. науч. Трудов ДГМИ: Перспективы развития горных технологий в начале третьего тысячелетия. – Алчевск: Д
3. Литвинский Г.Г., Касьянов В.А. Основы геофизического мониторинга горного массива измерением диэлектрической проницаемости пород. - Проблемы и перспективы освоения подземного пространства городов. – Днепропетровск: Сб. науч. Трудов НГА Украины. – Днепропетровск: РИК НГАУ, 1998, с.197-202
4. Литвинский Г.Г. Понятие поврежденности в микромеханике разрушения пород. - В сб. науч. Трудов ДГМИ: Перспективы развития горных технологий в начале третьего тысячелетия. – Алчевск: Дгми, 1999. –с. 43-48
5. Литвинский Г.Г. Кинетические уравнения реономной микромеханики деформирования и разрушения материалов. - В сб. науч. трудов: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамич. явления в горных породах. – Симферополь: Таврический нац. Ун-тет им. Акад. В.И. Вернадского, 1999. с. 51-52
6. Литвинский Г.Г. Обобщенный паспорт прочности горных пород. - Науковий вісник нац. гірничої академії України. – Дніпропетровськ: НГАУ, 1999. – С. 85-89
7. Garry G. Litvinsky. Nowa koncepcja i fundamentalni prawidlowosci przejawow cisnienia gorotworu w wyrobiskach podziemnych. - Proceeding: International Mining Forum. – Krakow: Polska Akademia nauk; Akademia Gorniczo-Gutnicza, 2000. – Pp. 43-47
8. Литвинский Г.Г. Буй Чи Шоат. Экспресс испытания горных пород на статический и ударный раскол/ - Алчевск, ДГМИ, 1999. – 143 с.
9. Литвинский Г.Г. Прочность материала с микродефектами/ - В сб. науч. трудов X межд. науч. школы: Деформирование и разрушение материалов

- с дефектами и динамич. явления в горных породах. – Симферополь: Таврический нац. Ун-тет им. Акад. В.И. Вернадского, 1999. с. 83-85
10. Литвинский Г.Г. Структура и напряженное состояние микронеоднородного материала. - В сб. науч. Тр.: Проблеми гірського тиску (Ground Control in Mining). – Донецк: ДонДТУ, 2000. – С.28-49
  11. Литвинский Г.Г. Реономная микромеханика и дифференциальные уравнения прочности. - Вестник НТУ «КПИ», вып.40. – К.:НТУУ «КПИ», 2001. – С 30-37
  12. Литвинский Г.Г. Основные концепции новой теории прочности хрупких материалов (горных пород). - Вісті Донецького гірничого інституту: Донецьк, ДонДТУ, 2002. с.80-82
  13. Литвинский Г.Г. Основы новой теории прочности. - Геотехническая механика/Межвед. сб. науч. трудов/ ИГТМ НАНУ. – Днепропетровск – Симферополь. 2002. – вып.№34. - с.47-52
  14. Литвинский Г.Г. Хрупкость, когезия и прочность горных пород. - Proceedings: Modern Geomechanical Methods in the Mining Industry And The Underground Civil Engineering Tunnel Construction./ June, 9 – 13 2003, Nessebar, Bulgaria. – Intern. Confer., - Bulgarian National Committee for Geomechanic. – 2003, Nessebar. p.p.5-12.
  15. Литвинский Г.Г. К разработке новой теории прочности. - Сб. научных трудов НГУ №15, том 2 – Днепропетровск, РИК НГУ, 2002. - с.34-39.
  16. Литвинский Г.Г. Влияние прочности на производительность разрушающего органа горной машины. - Материалы международ. научно-практич. конференции «Уголь – Mining Technologies». – Алчевск: ДГМИ, 2003. – с.19-23.
  17. Литвинский Г.Г. Прочность трещиноватых массивов. - Материалы VI Международного симпозиума «Освоение месторождений минеральных ресурсов в подзем. строительство в сложных гидрогеологических условиях / Белгород: ВИОГЕМ, 21 – 25.05.2001. – с.590-592
  18. Литвинский Г.Г. Прочность – критика, теория и новая концепция. - В сб. материал. укр.-польского форума горняков «Горнодобувна промисловість України і Польщі». – Днепропетровск, НГУ, 2004.- с.572-590
  19. Литвинский Г.Г. Rock strength – new concept and problem solution. - Geotechnika i budownictwo specjalne 2004 / XXVII Zimowa Szkoła Mechaniki Goorotworu, Zaczopane, 14 –19 marca 2004. – AGH, Krakow, 2004.- pp.143-150.

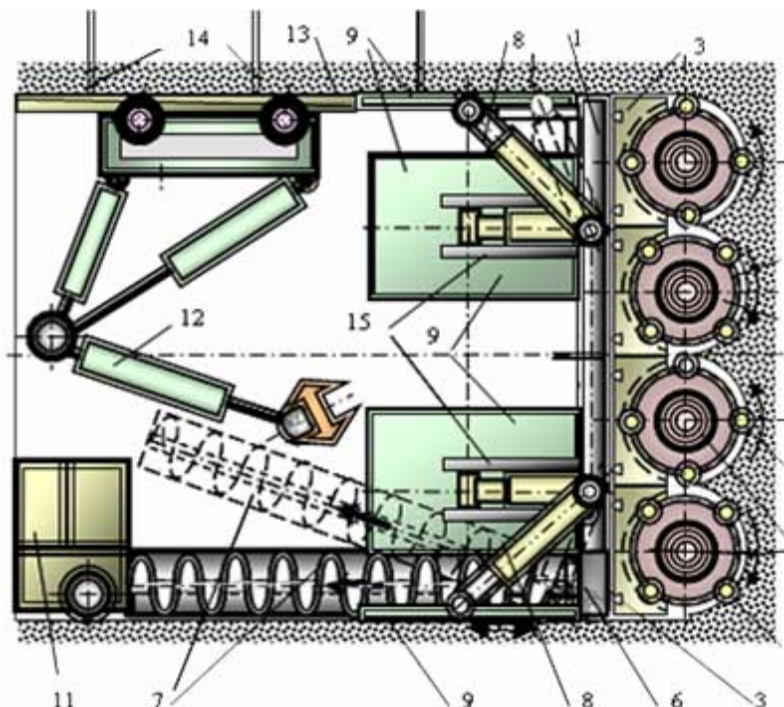
20. Литвинский Г.Г. Проблемные вопросы прочности горных пород. - Современные проблемы шахтного и подземного строительства. Вып.5, Материалы межд. научн.-практич. симпозиума. – Донецк: Норд-Пресс.- 2005, с.139-164.
21. Литвинский Г.Г. Кинетические уравнения реономной микромеханики деформирования и разрушения материалов. - В сб. науч. трудов: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамич. явления в горных породах. – Симферополь: Таврический нац. Ун-тет им. Акад. В.И. Вернадского, 1999. с. 51-52
22. Литвинский Г.Г. Обобщенный паспорт прочности горных пород. - Науковий вісник нац. гірничої академії України. – Дніпропетровськ: НГАУ, 1999. – С. 85-89
23. Garry G. Litvinsky. Nowa koncepcja i fundamentalni prawidlowosci przejawow cisnienia gorotworu w wyrobiskach podziemnych. - Proceeding: International Mining Forum. – Krakow: Polska Akademia nauk; Akademia Gorniczo-Gutnicza, 2000. – Pp. 43-47
24. Литвинский Г.Г. Буй Чи Шоат. Экспресс испытания горных пород на статический и ударный раскол/ - Алчевск, ДГМИ, 1999. – 143 с.
25. Литвинский Г.Г. Прочность материала с микродефектами/ - В сб. науч. трудов X межд. науч. школы: Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамич. явления в горных породах. – Симферополь: Таврический нац. Ун-тет им. Акад. В.И. Вернадского, 1999. с. 83-85
26. Литвинский Г.Г. Структура и напряженное состояние микронеоднородного материала. - В сб. науч. Тр.: Проблеми гірського тиску (Ground Control in Mining). – Донецк: ДонДТУ, 2000. – С.28-49
27. Литвинский Г.Г. Реономная микромеханика и дифференциальные уравнения прочности. - Вестник НТУ «КПИ», вып.40. – К.:НТУУ «КПИ», 2001. – С 30-37
28. Литвинский Г.Г. Основные концепции новой теории прочности хрупких материалов (горных пород). - Вісті Донецького гірничого інституту: Донецьк, ДонДТУ, 2002. с.80-82
29. Литвинский Г.Г. Основы новой теории прочности. - Геотехническая механика/Межвед. сб. науч. трудов/ ИГТМ НАНУ. – Днепрпетровск – Симферополь. 2002. – вып.№34. - с.47-52
30. Литвинский Г.Г. Хрупкость, когезия и прочность горных пород. - Proceedings: Modern Geomechanical Methods in the Mining Industry And The Underground Civil Engineering Tunnel Construction./ June, 9 – 13 2003, Nessebar,

- Bulgaria. – Intern. Confer., - Bulgarian National Committee for Geomechanic. – 2003, Nessebar. p.p.5-12.
31. Литвинский Г.Г. К разработке новой теории прочности. - Сб. научных трудов НГУ №15, том 2 – Днепропетровск, РИК НГУ, 2002. - с.34-39.
  32. Литвинский Г.Г. Влияние прочности на производительность разрушающего органа горной машины. - Материалы международ. научно-практич. конференции «Уголь – Mining Technologies». – Алчевск: ДГМИ, 2003. – с.19-23.
  33. Литвинский Г.Г. Прочность трещиноватых массивов. - Материалы VI Международного симпозиума «Освоение месторождений минеральных ресурсов в подзем. строительство в сложных гидрогеологических условиях / Белгород: ВИОГЕМ, 21 – 25.05.2001. – с.590-592
  34. Литвинский Г.Г. Прочность – критика, теория и новая концепция. - В сб. материал. укр.-польского форума горняков «Горнодобувна промисловість України і Польщі». – Днепропетровск, НГУ, 2004.- с.572-590
  35. Литвинский Г.Г. Rock strength – new concept and problem solution. - Geotechnika i budownictwo specjalne 2004 / XXVII Zimowa Szkola Mechaniki Górotworu, Zaczopane, 14 –19 marca 2004. – AGH, Krakow, 2004.- pp.143-150.
  36. Литвинский Г.Г. Проблемные вопросы прочности горных пород. - Современные проблемы шахтного и подземного строительства. Вып.5, Материалы межд. научн.-практич. симпозиума. – Донецк: Норд-Пресс.- 2005, с.139-164.
  37. Литвинский Г.Г. К теории масштабного эффекта//Межд. конф. «Форум гірників -2006» - Дн-ск: НГУ, 2006. – С. 54-65

# ПОИСКОВЫЕ КОНСТРУКТОРСКИЕ РАЗРАБОТКИ

## 1. Комбайн Проходческий Фронтальный КПФ "MIR"

(Литвинский Г.Г. Комбайн КПФ MIR. Уголь Украины, 2005, №7, с.22-24)



**Назначение:** скоростное проведение горизонтальных и наклонных горных выработок прямоугольного сечения на шахтах и рудниках

**Новизна:** режущий инструмент – шарошка, шнековый рабочий орган, новый распорно-шагающий движитель, новая компоновка конструкции, вибрационное разрушение пород, высокая маневренность в пространстве, сочетание с анкерной и экструзионной крепью, гладкий контур и точность трассы выработки

### **Показатели и достоинства:**

универсальность по крепости пород ( $f < 20$ ) и наклону выработок ( $\pm 45^\circ$ );

исключение дорогих и громоздких редукторов, валов, резцов, гусениц;

поточная безлюдная технология, автоматизация, механотроника,

безопасность и комфортность труда; звено из 2- 4 чел.

возможность проходки широким ходом, оставление породы в расколке,

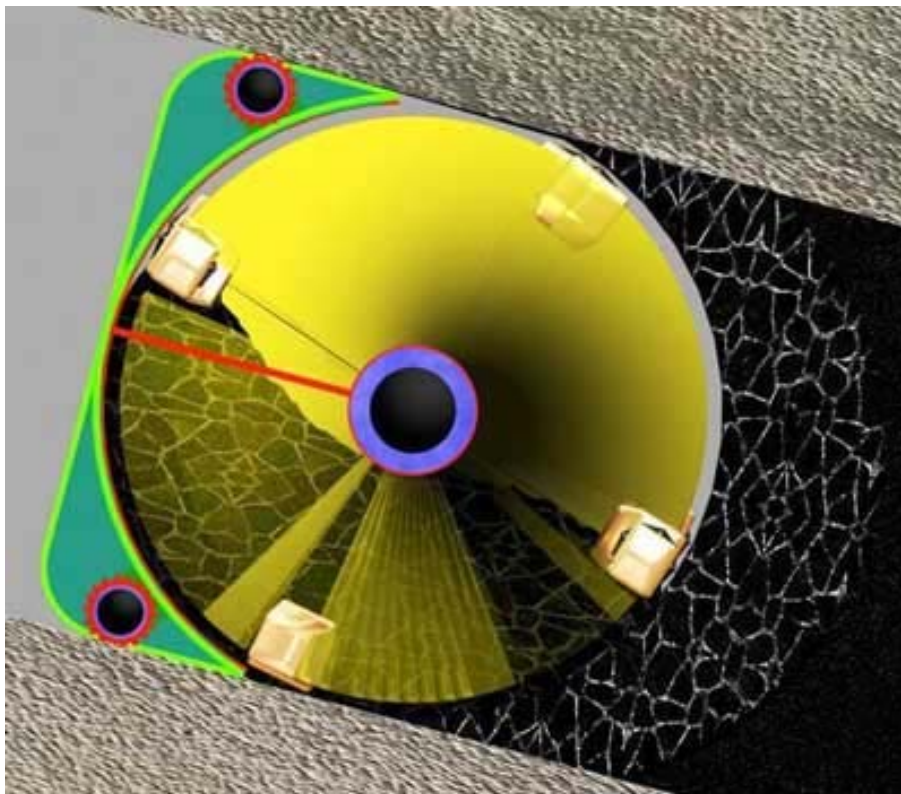
скорость проходки 2-3 м/час (50-100 м/сут), мощность комбайна 300-400 кВт,

низкая стоимость комбайна 500-700 тыс. €, срок окупаемости – 1-2 мес.,

снижение стоимости проходки в 3-5 раз, трудоемкости в 7-12 раз;

## 2. Агрегат фронтальной шнековой выемки АФШВ

(Литвинский Г.Г. Агрегат для безлюдной выемки тонких пластов угля -  
Уголь Украины, 2006, №3, с.16-19)



**Назначение:** безлюдная поточная высокопроизводительная выемка тонких угольных пластов по падению и простиранию, в том числе на высокогазовых месторождениях с углами падения до 45 градусов.

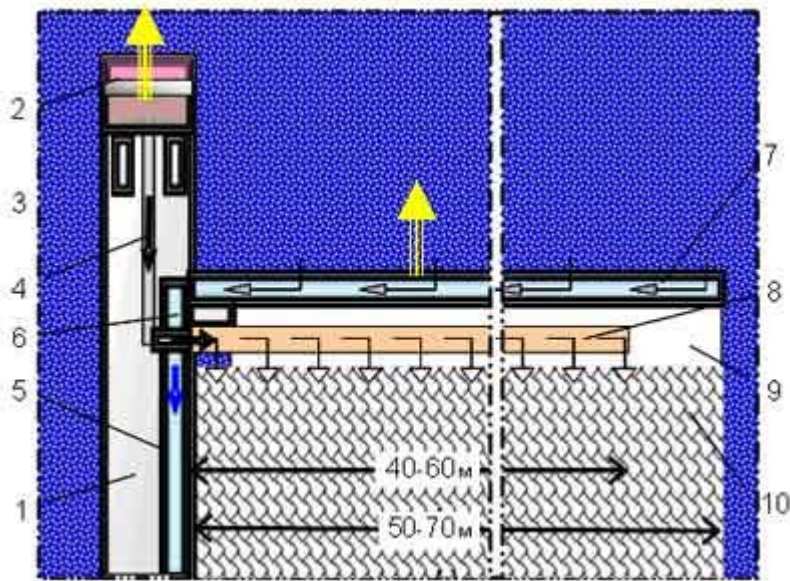
**Новизна:** шарошки на шнеке фронтально разрушают пласт, адаптация к гипсометрии, новый напорный орган, новая компоновка конструкции, функциональное совмещение в одном органе всех процессов в забое – выемки, погрузки и доставки угля, сочетается с механизированной шнековой закладкой породы

### **Показатели и достоинства:**

- Область применения – тонкие (0,4-1,2 м) пласты угля (универсальность)
- Безлюдная выемка, организация работ – поточная, адаптация к условиям выемки,
- Отсутствие концевых операций в лаве, высокая надежность, привод – на штреке,
- Длина лавы 100-120 м, подвигание – 50-100 м/сут, добыча - 1000 т/смену,
- Полная безопасность и комфортность труда, работа в нейтральной газовой среде,
- Мощность двигателя 300-350 кВт, скорость вращения шнека 1-2 об/с,
- Время отработки столба 1,5–2 мес., звено из 2- 4 чел.
- Стоимость агрегата– 400-450 тыс.€, срок окупаемости– 1-2 мес.



### 3. Новая технология проходки выработок комбайном КПФ "MIR" и агрегатами АФШВ+АФШБ



**Технологическая схема проведения бремсберга:** 1 – бремсберг; 2 – комбайн «MIR»; 3 – энергопоезд; 4 – породный конвейер; 5 - угольный конвейер; 6 – привод выемочного 7 и бутового 8 агрегатов; 9 – выработанное пространство; 10 – раскоска

**Назначение:** скоростная проходка пластовых горизонтальных и наклонных выработок комбайном КПФ “MIR” по восстанию и падению с оставлением породы в бутовой полосе высокой плотности, попутная добыча угля (замена породы на уголь)

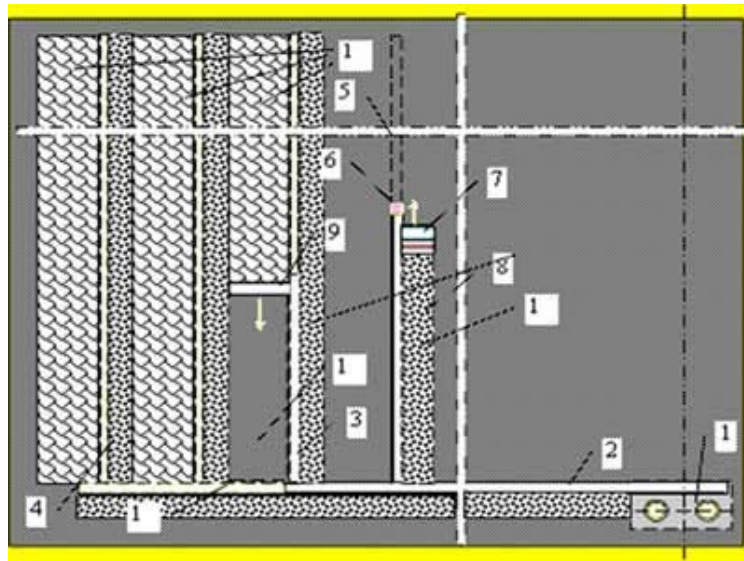
**Новизна:** проходческие работы в забое выполняются фронтальным комбайном КПФ "MIR" и совмещаются с одновременными работами по выемке пласта агрегатом АФШВ и закладкой породы от проходки в выработанное пространство агрегатом АФШБ (бутовым), обеспечивается замена породы на уголь.

#### **Показатели и достоинства:**

- Скорость проходки восстающего и выемки угля в лаве для раскоски 50-100 м/сут.
- Объем горной массы для закладки 500-1000 м<sup>3</sup>/сут, добыча угля до 2000 т/сут.,
- Полная безопасность и комфортность труда, звено из 4-6 чел/см.,
- Установленная мощность двигателей 700-800 кВт, переход от электродвигателей на дизельный привод (метанодизели),
- Нет породной транспортной цепочки в шахте, упрощение ее инфраструктуры,
- Повышение производительности труда по проходке в 10-15 раз,
- Возможность создания нейтральной газовой среды и отказа от проветривания,
- Снижение себестоимости угля в 7-10 раз, повышение его качества, снижению зольности,
- Стоимость оборудования 1,3-1,5 млн. €, срок окупаемости – 2-3 мес.



#### 4. Универсальные способ вскрытия, схема подготовки и система разработки на шахте XXI века



1- бутовая полоса шириной 30-50 м; 2 – магистральный штрек, пройденный по нижней границе поля; 3 – пройденный по восстанию бремсберг; 4 – погашенный после отработки бремсберг; 5 – трасса нового бремсберга; 6 – проходческий забой с комбайном MIR; 7 – широкий ход нового бремсберга с помощью агрегатов АФШВ и АФШБ; 8 - бутовая полоса; 9 – очистной забой с агрегатом АФШВ

**Область применения:** для отработки пологих, наклонных и крутых угольных пластов мощностью от 0,4 до 2м с созданием нейтральной газовой среды ( $\text{CH}_4$ ).

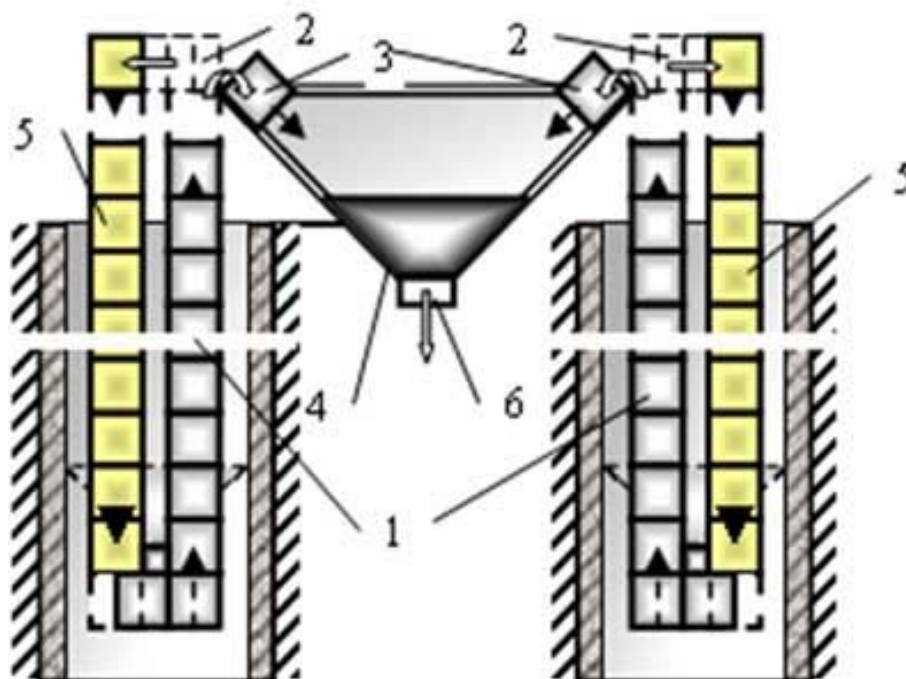
**Новизна:** вскрытие шахтного поля 2х4 км двумя сдвоенными стволами на нижнюю границу, проходка комбайном MIR главного магистрального штрека и бремсберга, отработка обратным ходом столбами по падению с погашением выработок.

##### **Показатели и достоинства:**

- минимальная протяженность выработок (в 2 раза меньше), погашение выработок за лавой при сроке их службы 2-3 мес., высокая их устойчивость;
- проходка идет с попутной добычей угля; порода оставляется в шахте;
- полная безопасность, нет проветривания, исключены взрывы метана, самовозгорание угля и пр., нет взрывных работ;
- использование сил гравитации для транспорта, водоотлива,
- естественная система подземного газообмена (метан и углекислый газ);
- безлюдная выемка, поточная организация работ; добыча 4-6 кТ/сутки,
- смена из 12-14 чел., длится 4 часа, непрерывный биомониторинг персонала,
- установочная мощность двигателей (дизелей) 1200-1400 кВт,
- скорость движения очистного и проходческого забоя 50-100 м/сут;
- время отработки столба 2-3 мес; себестоимость добычи 1 т угля 5-6 € (25-30 грн.)
- стоимость оборудования 1,8-2,5 млн. €, срок окупаемости 2,0-2,5 мес.

## 5. Шахтный гидродомкратный подъем и водоотлив ГДПВ

(Литвинский Г.Г. Гидродомкратный подъем и водоотлив ГДПВ. - Уголь Украины, 2005, №10, с.22-24)



**Назначение:** высокопроизводительный подъем сыпучих грузов и рудничной воды с любой глубины для шахт и рудников

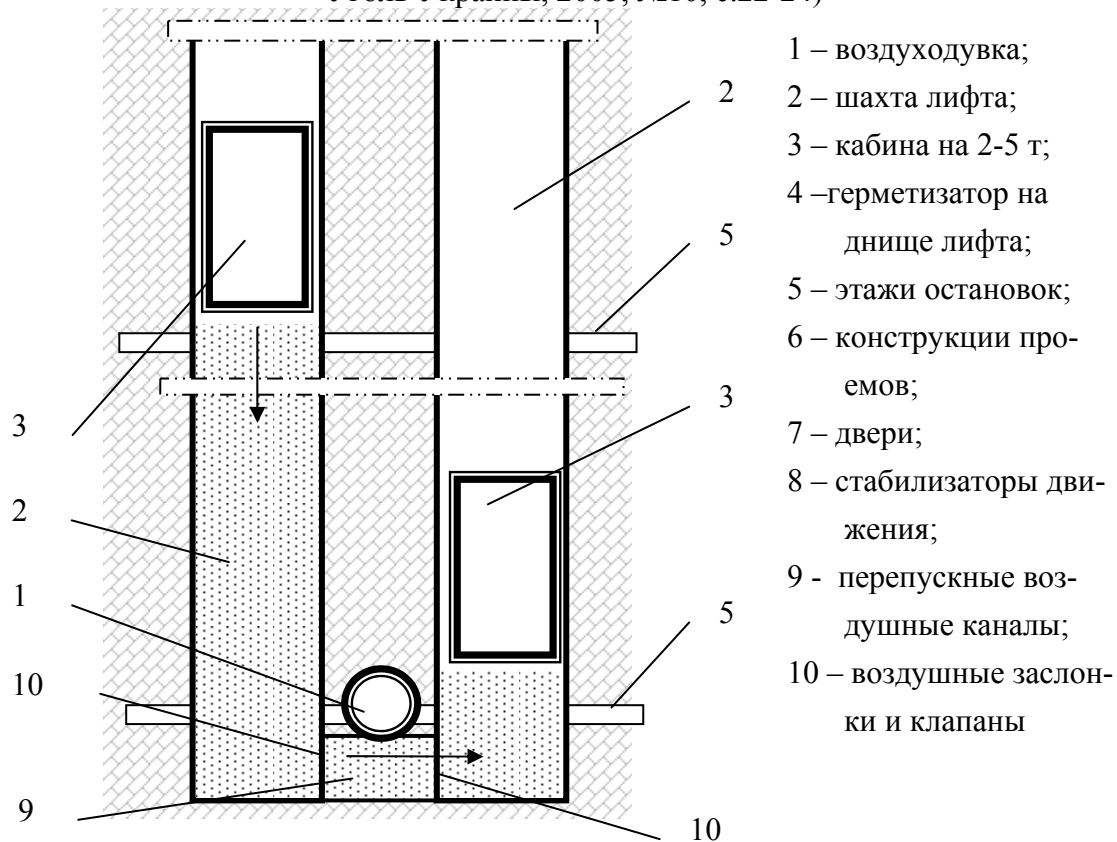
**Новизна:** непрерывный бесканатный подъем колоннами боксов (ящиков), каждый емкостью около  $1 \text{ м}^3$ , подъем в виде автоматических роторных линий в вертикальном стволе, использование в качестве движителей систем гидродомкратов, расположенных на опорных станциях в стволе через 100 м, беструбный водоотлив, роторные линии погрузки и разгрузки с минимальной площадью (3 кв.м),

### **Показатели и достоинства:**

- скорость движения колонн боксов 0,2-0,3 м/с; полная автоматизация;
- повышение КПД, экономия энергии на подъем в 2 раза;
- автоматическая непрерывная работа под управлением ЭВМ с поверхности;
- простота и дешевизна конструкции, отсутствие валов, канатов, редукторов и др.;
- высокая надежность непрерывной работы по 20 час. в сутки;
- производительность не зависит от глубины подъема; до 20 тыс.м<sup>3</sup>/сут и более;
- совмещение операций подъема и водоотлива;
- поверхностный комплекс разгрузки боксов сокращается до 3 м<sup>2</sup>;
- околоствольный двор уменьшается в 3-4 раза
- исключение канатов, труб, копров, зданий подъемных машин, армировки, надшахтных зданий и сооружений;
- значительное сокращение капитальных затрат на стационарные машины шахт и рудников, простота и высокая скорость строительства.

## 6. Шахтный аэропоршневой лифт ЛША

(Литвинский Г.Г. Шахтный аэропоршневой лифт -  
Уголь Украины, 2005, №10, с.22-24)



**Назначение:** высотные гражданские и промышленные здания и объекты. грузоподъемные подьемы для вертикальных стволов шахт, рудников

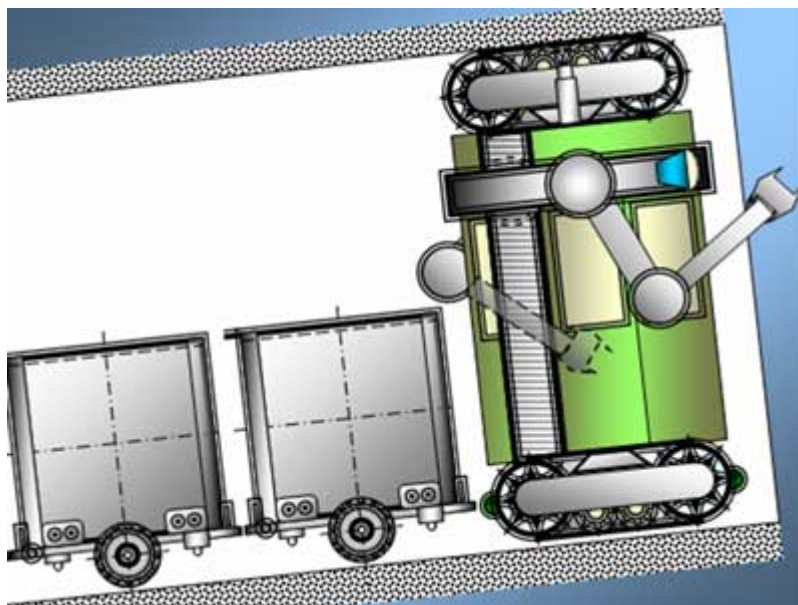
**Новизна:** использование движения лифтов в шахтах под действием избыточного давления воздуха, нагнетаемого воздуходувкой, полная уравновешенность подъема.

**Показатели и достоинства:**

- Грузоподъемность - 2т.
- Давление воздуха - 0,05 ат.
- Скорость подъема - 3 м/с.
- Расход воздуха - 15 м<sup>3</sup>/с.
- Мощность воздуходувки - 60 кВт.
- полная безопасность даже при проломе шахты, в которой движется лифт
- простота монтажа, не требует устройства подвала и заглубления,
- автоматическая работа, простота обслуживания и ремонта;
- отсутствие копров, подъемных машин, шкивов, канатов;
- снижение затрат: капитальных - в 2-3 раза, эксплуатационных - в 5 раз.

**Оптимально решает проблему лифтового городского хозяйства, метро, высотных и обычных гражданских и промышленных объектов.**

## 7. Подземный тягач-автокар с поездом грузовых тележек



**Конструктивные элементы тягача-автокара:** гусеничный движитель, верхняя гусеница для распорных усилий, двигатель - свободнопоршневой метанодизель, микро-процессорное управление, набор сменных гидроинструментов на скелетоне, кабина для звена из 2-х чел., оборудована климатизатором, беспроводной связью с диспетчером и компьютером,

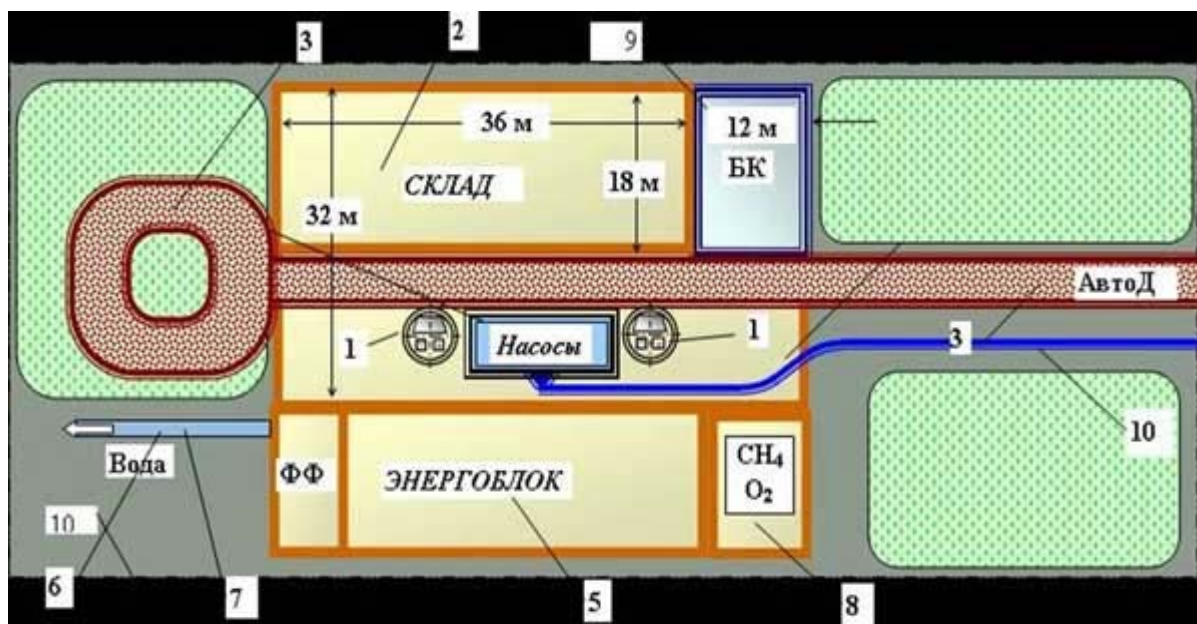
**Назначение:** безрельсовый транспорт грузов и людей по горизонтальным и наклонным выработкам до 35°, выполнение ремонтных и вспомогательных работ в горных выработках

**Новизна:** в автокаре впервые использована дополнительная распорная гусеница в кровлю выработки, он приспособляется к различной высоте выработки, автокар оборудован скелетоном для монтажных работ.

**Показатели и достоинства:**

- Прицепной вес до 10 т.
- Скорость движения до 20 км/час.
- Мощность двигателя 50-70 кВт.
- Автоматическая сцепка и расцепка одноосных полувагонов;
- кабина для 2-х геонавтов.
- Автономный климат, избыточное давление и терморегуляция.
- Автоматическое управление и мобильная связь.
- Грузоподъемность скелетона до 1 т.
- Грузовые тележки одноосные, с малым радиусом поворота.

## 8. Генплан поверхности шахты XXI века



1 - шахтный ствол D=4-5 м; 2 - производственный блок; 3 - автодорога 6 м; 4 - насосная ГДПВ; 5 - энергоблок; 6 - очистка рудничных вод; 7 - вода для с/х нужд; 8 - кислородная станция; 9 - бытовой комбинат; 10 - гидротранспорт угля; 11 - озеленение

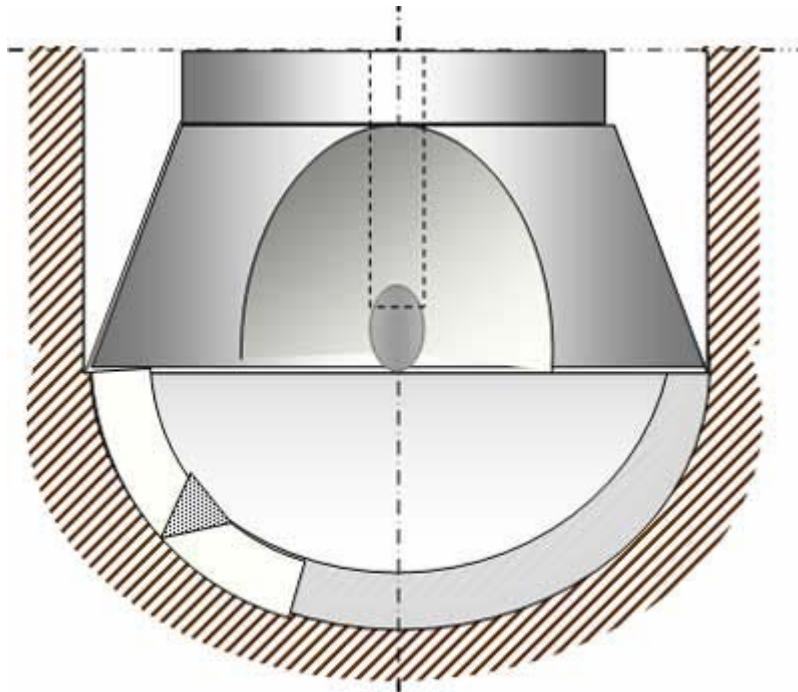
**Новизна:** генплан включает единый закрытый экологически чистый производственный блок, самостоятельное энерго- и водоснабжение, автоматизированная отправка угля гидротранспортом, отсутствует ж/дорога,

### **Показатели и достоинства:**

- занимает площадь 0,3 га (вместо 10-15 га),
- конструктивно выполнен в виде изолированного производственного цеха с размещением стволов, энергоблока, фильтров воды, складов, автодороги и др.
- обеспечивает переработку угля 4-7 тыс.т/сут и отправку его гидротранспортом потребителю на 5-50 км,
- рассчитан на добычу метана 50-100 тыс. м<sup>3</sup>/сут,
- поставляет воду 10-20 тыс. м<sup>3</sup> для капельного орошения территории 1-5 тыс. га, а также оранжерей и парников,
- центр горно-аграрного анклава, дает энергию ближайшим поселкам;
- экологически улучшает окружающую среду;
- полностью энергетически автономный, не требует подключения к ж/д дороге, энерго- и водо- снабжению;



## 9. Хордовая коронка для бурения шпуров



Параболическая форма хордовой коронки

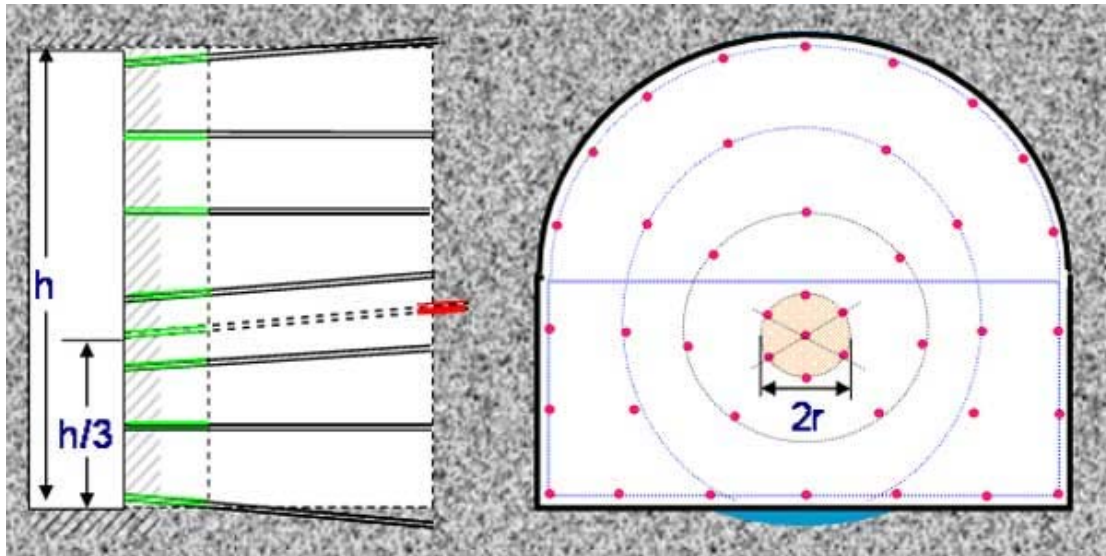
**Назначение:** скоростное бурение шпуров и скважин в крепких породах для взрывных работ и установки анкеров в подземных выработках шахт и рудников..

**Новизна:** обеспечение равномерного разрушения породы в забое за счет хордового расположения режущих лезвий и улучшенная очистка забоя от буровой мелочи за счет формы забоя в виде параболоида вращения.

**Показатели и достоинства:**

- Скорость бурения повышается в 2-3 раза, особенно в прочных породах.
- Материал режущих лезвий – алмазосплавная композиция.
- Высокая износостойчивость.
- Рациональное распределение режущих кромок в соответствии с величиной удельной площади разрушения.
- Самоочищение забоя за счет отброса породы к стенкам шпура центробежными силами.
- Повышение точности бурения из-за уменьшения необходимых напорных усилий на коронку в 1,5 – 2 раза.
- Снижение стоимости бурения шпуров и скважин на 40-70%.

## 10. Прямой цилиндрический вруб



**Область применения:** для буровзрывного проведения полевых горных выработок различного назначения сечением от 6 до 22 м<sup>2</sup>, особенно по крепким породам (универсальность).

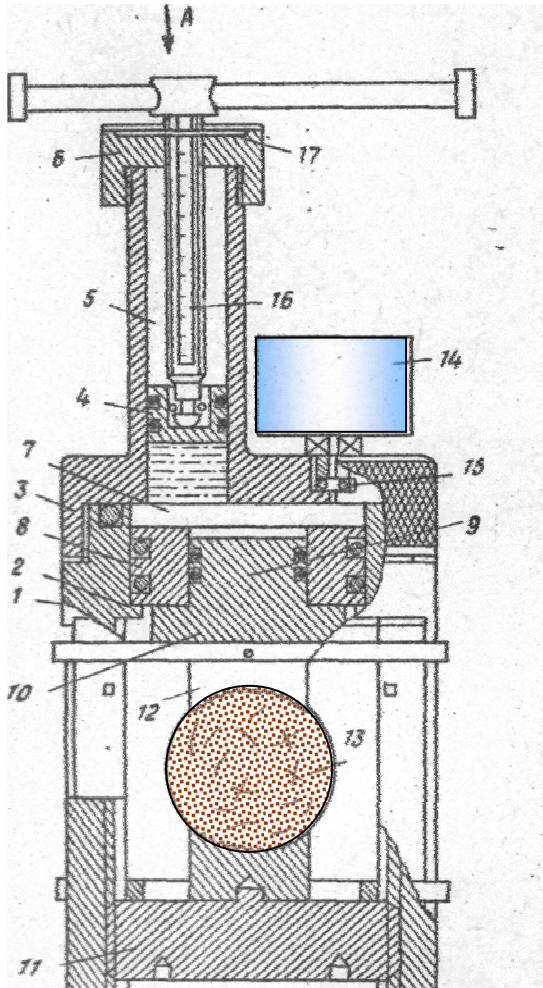
**Новизна:** обеспечение максимальной концентрации энергии при взрыве за счет предельного сближения зарядов вруба, полная очистка врубовой полости центральным подчищающим шпуром.

### **Показатели и достоинства:**

- Полное разрушение породы в центре вруба, высокий К.И.Ш. = 0,9-0,95.
- Малое число ступеней замедления электродетонаторов.
- Простота схемы и удобство разметки и бурения шпуров, доступность контроля качества..
- Отсутствие ограничений на выбор способов и средств бурения шпуров.
- Устранение повреждения крепи взрывом; незначительный отброс породы от забоя.
- Адаптивность, высокая безопасность работ (исключение зажима шпуров, выброса зарядов и др.).
- Снижение стоимости БВР на 30-40%.

# Портативный прибор для экспресс-испытаний горных пород ППЭИ

(А.с. СССР № 641098)



- 1 – корпус; 2 – кольцевой упор;  
3 – крышка корпуса;  
4,5 – поршень и винт привода;  
6 – гайка, 7 – силовой цилиндр;  
8,9 – силовой и вспомогательный поршень;  
10,11 – верхняя и нижняя плиты,  
12 – сменные инденторы,  
13 – образец,  
14 – манометр с гидроканалом 15;  
16,17 – отсчетная шкала с нониусом.

**Предназначен** для экспресс определения прочностных и деформационных характеристик горных пород в лабораторных и полевых условиях

**Область применения:** для испытания образцов горных пород правильной и неправильной формы. Позволяет определять прочность на одноосное сжатие и растяжение.

**Устройство:** включает корпус, гидросистему с коаксиальными телескопическими поршнями, винтовой привод, манометр, набор различных инденторов.

## **Показатели:**

- Усилие нагружения – 100 кН;
- Усилие на рукоятке – 100 Н;
- Масса в сборе – 3,8 кг;
- Габариты: высота – 180 мм  
диаметр – 100 мм;
- Точность показаний  
нагрузки – 1 кН;  
деформации – 0,1 мм

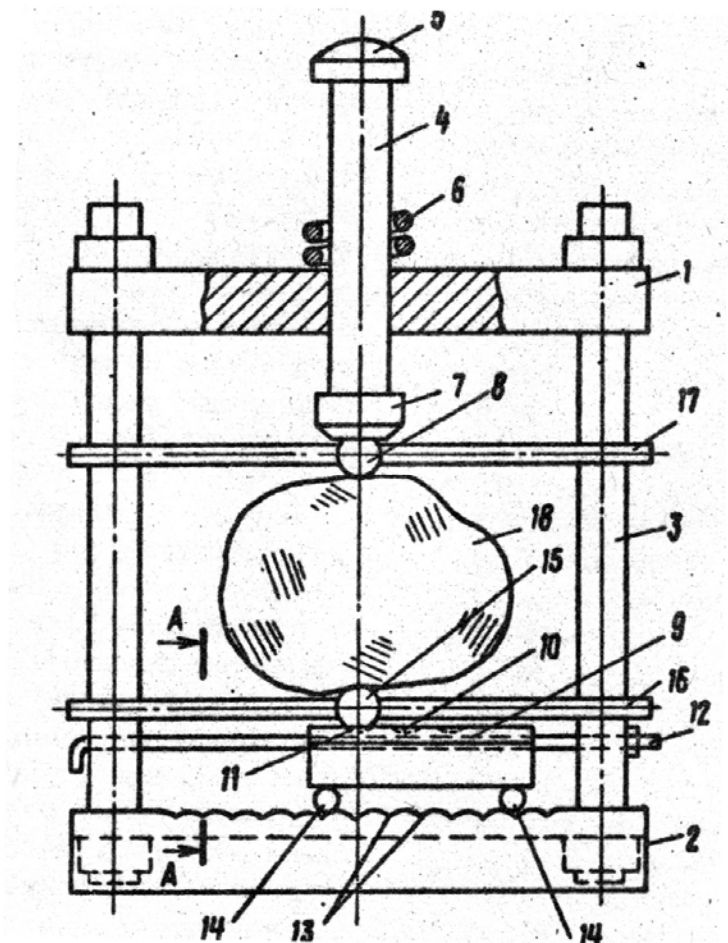
## **Достоинства**

- позволяет осуществлять экспресс испытания образцов пород различной формы;
- является частью портативной экспресс-лаборатории;



# Прибор для ударных экспресс-испытаний горных пород ПУЭИП

(А.с. СССР № 1446303)



## Конструктивные элементы:

- 1,2 – верхняя и нижняя плита;
- 3 – стойки;
- 4,5,6 – боек с хвостовиком и пружиной;
- 7,8 – пуансон с индентором;
- 9,10,11 – нижний пуансон,
- 12, 13, 14, 15 – силоизмерительное устройство с мерной проволокой;
- 16,17 – направляющие планки;
- 18 – образец.

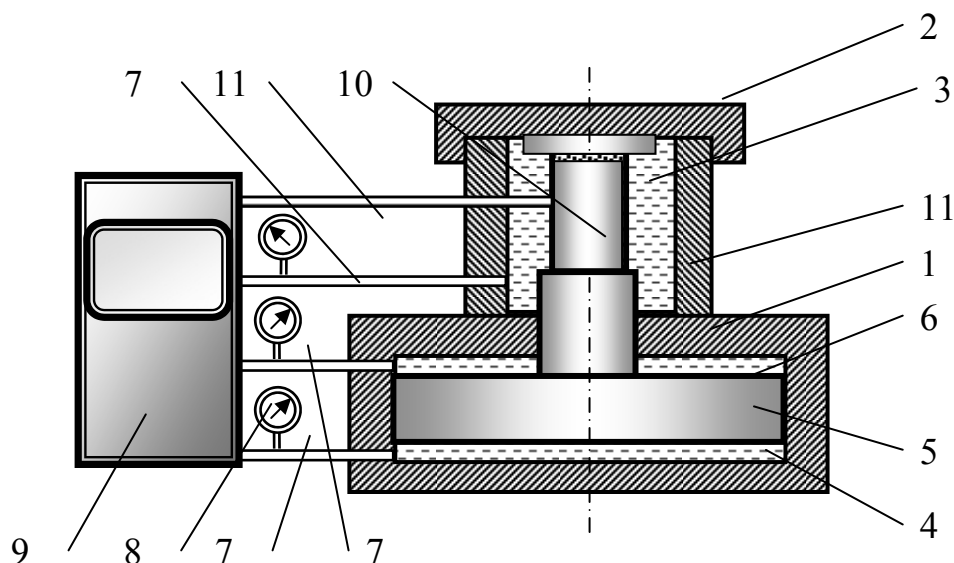
**Предназначен** для опробывания пород на ударный раскол в полевых (в подземных) и лабораторных условиях экспресс-методом.

**Устройство и новизна:** содержит силовую раму из двух стоек и плит, образец помещают между двумя пуансонами и подвергают удару с помощью бойка. Усилие раскалывания определяют по отпечатку на мерной проволоке.

**Показатели:** усилие удара – 40...90 кН; масса в сборе – 2,4 кг; габариты: высота – 240 мм, ширина – 50 мм, точность показаний 10-15%.

**Достоинства:** простота изготовления, низкая стоимость, простота обслуживания, высокая производительность, произвольная форма образцов, доступность и массовость испытаний.

## Стабилометр жесткого нагружения (А.с. СССР № 1298586)



### **Конструктивные элементы:**

1 - корпус, 2 - крышка корпуса, 3 - испытательная камера, 4 - нагружающая камера, 5 - двуступенчатый поршень, 6 - камера отпора, 7 - магистрали давления для каждой камеры, 8 - манометры, 9 - блок управления испытаниями, 10 - образец; 11 - провода датчиков, установленных на образце

**Предназначен** для испытаний строительных материалов и горных пород в условиях многоосного нагружения при произвольных законах изменения нагрузки и деформации, особенно для изучения закономерностей деформирования и разрушения материалов, в том числе и на участке запредельных деформаций.

**Устройство и новизна:** компактный пресс-стабилометр из трех взаимодействующих обособленных камер давления, в которых давление управляется микро ЭВМ. Способен создать сверхжесткую систему нагружения (произвольного закона деформирования или его скорости).

**Показатели и достоинства:** давление в камерах до 20-30 МПа, усилие при одноосном нагружении образца до 1 МН (100 тс), источник давления - баллон со сжатым газом 20-30 МПа, внутренний диаметр нагружающего поршня - 300 мм, высота пресса - 300 мм, способен производить автоматическую запись всех показателей испытаний в реальном режиме времени

Является представителем поколения прессов нового технического уровня, особенно пригоден для научных исследований.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

|                      |                  |                      |                |
|----------------------|------------------|----------------------|----------------|
| Alber M. ....        | 85, 183          | Давиденков Н.Н. .... | 8, 65          |
| Bažant Z. P. ....    | 186              | Екобори Т. ....      | 181, 182       |
| Bernaix J. ....      | 185              | Ершов Л.В. ....      | 10             |
| Bieniawski Z.T. .... | 182              | Заславский Ю.З. .... | 187            |
| Billam J. ....       | 186              | Ильюшин А.А. ....    | 55             |
| Bray J.W. ....       | 184              | Ионов В.Н. ....      | 181            |
| Brown E.T. ....      | 182              | Иоффе А.Ф. ....      | 8              |
| Hodgson R.A. ....    | 184              | Ирвин Дж. ....       | 8, 48          |
| Hoek E. ....         | 182              | Карзов Г.П. ....     | 183            |
| Heiland J. ....      | 85 183           | Карман Т. ....       | 25             |
| Malina H. ....       | 184              | Карташов Ю.М. ....   | 185            |
| Marsal R.J. ....     | 186              | Картозия Б.А. ....   | 185            |
| Müller L. ....       | 184              | Касьянов В.А. ....   | 194            |
| Yu Q. ....           | 185              | Качанов Л.М. ....    | 69, 181        |
| Амонтон Г. ....      | 56, 64           | Колоколов О.В. ....  | 190            |
| Андрейкив А.Е. ....  | 182              | Кужель С.В. ....     | 185            |
| Анциферов А.В. ....  | 4                | Кузнецов Г.Н. ....   | 184            |
| Аргон А. ....        | 181              | Куленич Б.И. ....    | 194            |
| Ардашев К.А. ....    | 184, 188         | Кулон Ш.О. ....      | 15             |
| Аренс В.Ж. ....      | 10               | Курман С.А. ....     | 10, 192        |
| Баклашов И.В. ....   | 185              | Лебедев А.А. ....    | 25, 182        |
| Баландин П.П. ....   | 181              | Либерман Ю.М. ....   | 182            |
| Беккер Р. ....       | 25               | Литвинский Г.Г. .... | 1, 4, 183, 187 |
| Бельтрами Э. ....    | 16               | Липкович С.М. ....   | 188            |
| Бенявский З.Т. ....  | 8, 32, 35, 36    | Лодэ В. ....         | 7, 24, 25, 29  |
| Божидарник В.В. .... | 183              | Лойцянский Л.Г. .... | 185            |
| Браун О. ....        | 8                | Лурье А.И. ....      | 185            |
| Буй Чи Шоат ....     | 194              | Макклиток Ф. ....    | 181            |
| Векслер Ю.А. ....    | 183              | Максвелл Д.К. ....   | 16             |
| Воробьев А.А. ....   | 183              | Марголин Б.З. ....   | 183            |
| Галилей Г. ....      | 13               | Мариотт Э. ....      | 14             |
| Генки Г. ....        | 16               | Матвеев Б.В. ....    | 185            |
| Гелескул М.Н. ....   | 186              | Мележик А.И. ....    | 193            |
| Гриффитс А. ....     | 7, 8, 46, 47, 63 | Мельников Н.В. ....  | 185            |
| Гук Р. ....          | 25               | Мизес Р. ....        | 16, 55, 59     |

|                                       |                 |                            |                  |
|---------------------------------------|-----------------|----------------------------|------------------|
| Миролубов И.Н.....                    | 24,181          | Сулим Г.Т. ....            | 183              |
| Михеев Г.В. ....                      | 185             | Сурков С.Н. ....           | 8                |
| Мор О.....                            | 8, 19, 21       | Томашевский Э.Е.....       | 183              |
| Надаи А.....                          | 21, 24, 26, 181 | Тонконогов М.П.....        | 183              |
| Орован Э.....                         | 8, 49           | Треска Х.Е. ....           | 15, 55           |
| Панасюк В.В. ....                     | 181, 182        | Усаченко Б.М. ....         | 4                |
| Партон В.З.....                       | 182             | Фадеев А.Б.....            | 185              |
| Паскаль Б.....                        | 44              | Филин А.П. ....            | 51,181           |
| Писаренко Г.С.....                    | 26, 51, 182     | Филоненко-Бородич М.М. ... | 22, 24,182       |
| Присташ В.В. ....                     | 193             | Фисенко Г.Л. ....          | 184, 185         |
| Протодяконов М.М...8, 29, 30, 31, 182 |                 | Фридман Я.Б.....           | 25, 181          |
| Протосеня А.Г.....                    | 10              | Хоек Е. ....               | 8, 51            |
| Пуассон С. ....                       | 7, 14, 146      | Хубер М.Т.....             | 16               |
| Пул Ч.....                            | 183             | Черепанов Г.П. ....        | 10, 48,182       |
| Пустовойтенко В.П. ....               | 182             | Чернышев С.В. ....         | 183              |
| Рац М.В.....                          | 183             | Чирков С.Е.....            | 185              |
| Регель В.Р.....                       | 183             | Шашенко А.Н.....           | 4,43, 45, 46,182 |
| Ржевский В.В. ....                    | 185             | Швецова В.А. ....          | 183              |
| Руппенейт К.В.....8, 28, 29, 31, 182  |                 | Шик В.М. ....              | 184              |
| Селиванов В.В. ....                   | 181             | Шульгин П.М. ....          | 196              |
| Слущкий А.И. ....                     | 183             | Ягн Ю.И.....               | 24, 181          |
| Ставрогин А.Н. ....                   | 186             | Ямщиков В.С.....           | 185              |
| Степанов А.В. ....                    | 63              |                            |                  |

**The Ministry of Education and Science of Ukraine  
The Donbass State Technical University**

**Garry G. LITVINSKY**

# **THE ANALYTICAL THEORY OF STRENGTH OF ROCKS AND MASSIFS**

In the monography the analysis of existing theories of strength is given and new, - analytical, - the theory of strength for structurally inhomogeneous and fissured materials is stated, first of all - rocks and massifs. The scale effect problem is solved, its connection with singularities of a structural structure of a massif is justified, association of the scale factor of strength on a stress condition is shown. The comparison theory and experiment is perform.

The book is intended for a wide range of scientific and engineering workers mining and a building industry, will be useful to senior students , masters and post-graduate students of mining high schools.

***Key words:***

*strength, theory, requirement for theory, continuousness, inhomogeneity, fissuring, damageability, rock, massif, scale effect, structural unit, mode of deformation, numerical calculus, experiment.*