

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Г.Г. Литвинский

Модуль 4.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КРЕПИ С МАССИВОМ
ГОРНЫХ ПОРОД

Конспект лекций и методические указания к изучению курса
"Механика подземных сооружений"

(для студентов горных специальностей и аспирантов)

У т в е р ж д е н о
на заседании кафедры
Строительные геотехнологии
Протокол N 1 от 30.08.13.

Алчевск ДонГТУ 2013

Модуль 4. Взаимодействие крепи с массивом горных пород/ Конспект лекций и методические указания к изучению курса "Механика подземных сооружений" (для студентов горных специальностей, магистров и аспирантов) / Сост. Г.Г. Литвинский. - Алчевск: ДонДТУ, 2013. - 48с.

Изложены основные теоретические положения об устойчивости горных пород при их разрушении в выработке. Проанализированы классические расчетные схемы проявлений горного давления, сформулированы важнейшие закономерности. Приведены начальные сведения о теории подобия и размерностей, методах моделирования горных процессов.

Составитель Г.Г. Литвинский, проф.

Отв. за выпуск Э.В. Фесенко, доц.

4.1. Основные режимы работы и геомеханические параметры крепи	3
4.2. Взаимодействие крепи с упругим массивом	6
4.3. Взаимодействие крепи со сводами естественного равновесия	9
4.4. Взаимодействие крепи с зоной неупругих деформаций	17
4.5. Моделирование проявлений горного давления	31
4.5.1. Понятия о моделировании	31
4.5.2. Понятия о теории размерностей	32
4.5.3. Основные теоремы теории подобия	34
4.5.4. Метод эквивалентных материалов	36
4.5.5. Метод центробежного моделирования	39
4.5.6. Метод электрогидродинамических аналогий (ЭГДА)	40
4.5.7. Другие методы моделирования	42
Методические указания к самостоятельной работе студентов	44

4.1. ОСНОВНЫЕ РЕЖИМЫ РАБОТЫ И ГЕОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ КРЕПИ

4.1.1. Геомеханическими параметрами крепи считают ее *грузонесущую способность* (отпор, реакцию) и *податливость* (жесткость).

Отпор (реакция) крепи q характеризует ее силовое, а податливость U - деформационное взаимодействие с массивом.

Графическое или аналитическое представление связи между грузонесущей способностью q и податливостью U крепи называют ее *деформационно-силовой характеристикой* (ДСХ). С позиций механики горных пород ДСХ полностью характеризует крепь и избавляет от необходимости рассмотрения ее конструктивных особенностей.

В аналитической форме уравнение ДСХ крепи имеет вид:

$$U = U(q) \text{ или } q = q(U), \quad (4.1)$$

а эти зависимости определяют экспериментально на стендах по испытанию крепи в специализированных лабораториях.

В зависимости от ДСХ различают два предельных (идеализированных) режима ее "работы" (взаимодействия с массивом) - жесткий и податливый (рис. 4.1).

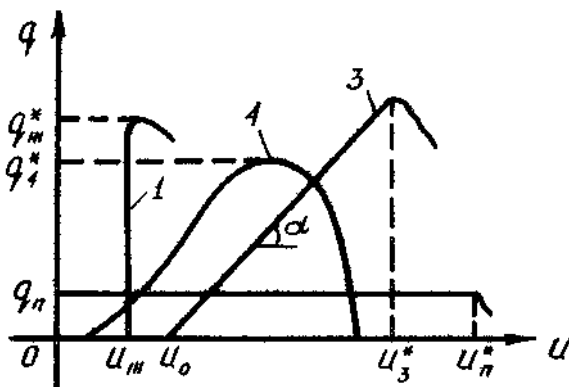


Рисунок 4.1 – Деформационно-силовые характеристики крепи с режимом работы: 1 – жестким, 2 – податливым, 3 – линейным, 4 – нелинейным

4.1.2. **Жесткий режим** работы определяется в виде заданных (фиксированных) крепью допустимых смещениях породного контура. На рис. 4.1 режим заданных смещений $U_{ж}$ представлен линией 1, которая показывает, что вначале породный контур сместился на величину $U_{ж}$, затем после контакта с крепью, смещения пород остановились и начала возрастать нагрузка q . При достижении нагрузки уровня предельной $q_{ж}^*$ происходит деформация крепи.

4.1.3. **Податливый режим** представлен линией 2 (рис. 4.1) и характеризуется заданным q_n отпором крепи, т.е. это режим заданных нагрузок, при которых растут смещения породного контура, контактирующего с крепью. Когда смещения достигнут предела конструктивной податливости крепи $U_{ж}^*$, крепь разрушается.

Сравнивая оба режима работы, можно видеть, что они описываются двумя геомеханическими параметрами: **заданными** ($U_{жс}$, q_n), которые "отслеживаются" крепью в процессе ее взаимодействия с массивом, и **предельными** ($q_{ж}^*$, $U_{ж}^*$), при достижении которых нормальная эксплуатация крепи невозможна.

4.1.4. **Режим линейно возрастающего** сопротивления крепи представлен графиком 3, когда до момента контакта крепи с породами контур сместился на величину U_a , а затем смещения крепи U растут пропорционально росту нагрузки q вплоть до деформации крепи ($U = U^*$). Степень "жесткости" крепи предопределяется углом наклона графика к оси U , численно коэффициент жесткости крепи равен

$$k_{ж} = \operatorname{tg} \alpha \quad (0 \leq k_{ж} < \infty) \quad (4.2)$$

Значит крепь с ДСХ типа 3 полностью описывается тремя параметрами U_0 , U^* , $k_{жс}$ (рис.4.1). Чем больше $k_{жс}$, тем ближе ДСХ крепи к жесткому режиму работы. Для идеально податливой крепи $k_{жс} = 0$, для идеально жесткой $k_{жс} \rightarrow \infty$.

Наиболее общий случай ДСХ крепи представлен графиком 4 с переменным $k_{жс}$, в каждой точке графика он равен производной:

$$k_{ж} = dq / du \quad (4.3)$$

4.1.5. При достижении предельного значения q^* (для жесткой

крепю), U^* (для податливой) или одного из этих параметров для других типов крепи, конструкция крепи претерпевает изменения (пластические шарниры, потеря устойчивости, заклинивание податливых соединений, разрушения) и меняет свой режим работы. Иногда расчетная схема крепи в процессе взаимодействия с массивом сменяется несколько раз (продумайте и приведите примеры!). Однако всегда на конечной стадии ДСХ крепи содержит "падающую" ветвь, у которой $k_{жс} < 0$. Это значит, что при увеличении деформаций U грузонесущая способность крепи q уменьшается. Иногда отрицательный коэффициент жесткости $k_{жс}$ называют **модулем спада**. При $k_{жс}$ - крепь **хрупко** разрушается, что наиболее опасно. (Проанализируйте другие значения $k_{жс}$).

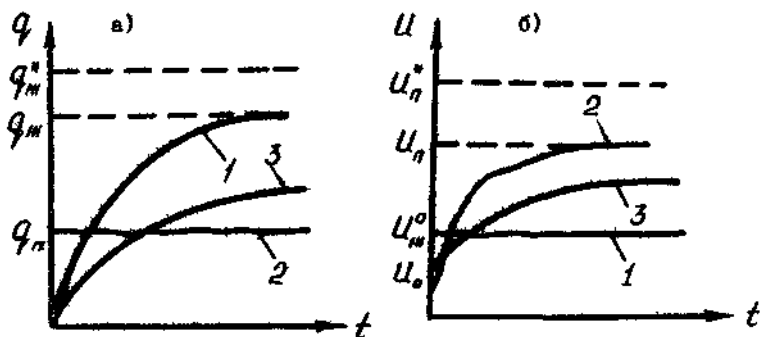


Рисунок 4.2 – Изменение геомеханических параметров q и u для идеально жесткой и податливой крепи во времени

На рис. 4.2 достаточно наглядно видны различия между жестким (1) и податливым (2) режимами работы крепи, если проследить за изменением отпора $q(a)$ и смещений $U(b)$ во времени при смещениях породного контура.

В реальных конструкциях ДСХ крепи различны в зависимости от условий взаимодействия с массивом, особенностей контакта с породой (сцепление, проскальзывание, толщина забутовки, ее качество и т.д.), закономерностей распределения внешних нагрузок на крепь и их изменения во времени. Поэтому у одной и той же крепи могут быть разные ДСХ по разным направлениям нагружения, при разных условиях контакта с массивом. Это чрезвычайно затрудняет оценку

режимов работы крепи, которая по одному направлению может быть податливой (например, по вертикали), а по другому (с боков) - жесткой.

4.1.6. Важной обобщенной геомеханической характеристикой крепи является ее работоспособность, которая количественно оценивает работу, совершаемую конструкцией крепи в процессе ее противодействия проявлениям горного давления.

Работоспособность конструкции удобно определить непосредственно из графика ДСХ каждой крепи - это будет не что иное, как площадь под графиком. Аналитически работоспособность крепи определяется по формуле (рис. 4.1)

$$A_k(u) = \int_0^u q dx,$$

где x - текущее значение смещений, $0 \leq x \leq U$.

Как следует из определения работоспособности крепи, она зависит от ее грузонесущей способности и податливости. Абсолютно жесткая крепь обладает нулевой работоспособностью, чем больше податливость крепи, тем большую она совершает работу в процессе противодействия смещениям пород в выработку. Поэтому так важно обеспечить податливость конструкции крепи, что позволяет избежать чрезмерного давления на нее со стороны массива горных пород.

4.2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КРЕПИ С УПРУГИМ МАССИВОМ

4.2.1. Рассмотрим распределение напряжений вокруг круглой закрепленной выработки радиусом $r = a$ в гидростатически нагруженном массиве (обозначения согласно модулям 1-3)

$$\left. \begin{matrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{matrix} \right\} = p \pm (p - q) \frac{a^2}{r^2}, \quad (a \leq r < \infty) \quad (4.4)$$

Если оценить влияние крепи q на концентрацию напряжений на контуре выработки, для чего $r = a$ подставим в (4.4):

то, подставляя обычные значения отпора крепи $q = 0.1$ МПа и напряжений в массиве $p = 10$ МПа, можно видеть, что $p \gg q$.

Отсюда следует важный вывод: при упругом взаимодействии крепи с массивом роль крепи ничтожно мала (не более 1-5%), она не способна существенно изменить упругие напряжения и предотвратить начало разрушения пород. Следовательно, при рассмотрении упругого массива можно пренебрегать наличием крепи в выработке и считать ее незакрепленной. Роль крепи резко возрастает после разрушения пород.

4.2.2. С методической точки зрения полезно проанализировать взаимодействие крепи с упругим массивом, в котором начальное поле напряжений задано соотношениями:

$$\sigma_z^0 = p = \gamma H \quad \sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \lambda p$$

На внешнем контуре круглой крепи, впаиванной в массив, действуют нормальные q и касательные t нагрузки:

$$q = q_0 + q_2 \cos 2\theta; \quad t = t_2 \cdot \sin 2\theta, \quad (4.5)$$

где q_0 , q_2 и t_2 - члены разложения внешней нагрузки в ряд Фурье; зависят от соотношения упругих и геометрических параметров крепи и массива. Характер распределения нагрузок на крепь и их величина зависит от ее жесткости.

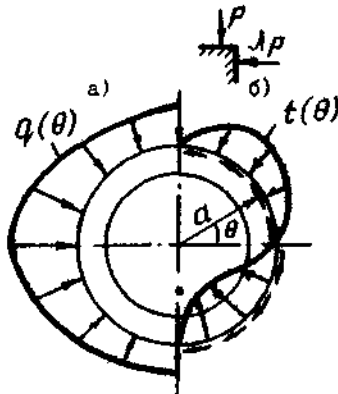


Рисунок 4.3 – Эпюры нагрузок на крепь

На рис. 4.3 представлены графики нормальных $q(\theta)$ (а) и касательных $t(\theta)$ (б) внешних нагрузок в зависимости от текущего угла θ . Обратите внимание, что нормальные нагрузки на крепь не могут быть отрицательны $q(\theta) \geq 0$ (почему?), а касательные нагрузки, как правило, меняют знак на противоположный при переходе при переходе через ось симметрии эпюры q . (Рекомендуем на рис. 4.3 указать значения q и t в точках эпюры, где угол θ кратен $\pi/4$, что позволит дать физическую интерпретацию q_0, q_2, t_2).

4.2.3. Если в выработке на рис. 4.3 установить крепь из выработанной при проходке породы, или породу до проведения выработки в пределах ее контура считать жесткой крепью, то внешние нагрузки будут равны

$$q = p[1 + \lambda + (1 - \lambda)\cos 2\theta]/2 \quad t = p[(1 - \lambda)\sin 2\theta]/2 \quad (4.6)$$

(Найдите отсюда значения q_0, q_2, t_2)

При отсутствии крепи $q_0 = q_2 = t_2 = 0$; а если проскальзывает по контакту с породой по закону сухого трения, то соблюдается равенство

$$|t| \leq fq,$$

где f – коэффициент трения.

Как видим, в зависимости от жесткости крепи, нагрузки со стороны массива могут значительно изменяться по величине и направлению от максимально возможных (4.6) до нуля. Любое отступление от осевой симметрии (рис.4.3) приводит к резкому изменению нагрузки даже в упругом случае (например, некольцевая крепь, неоднородные породы, $\lambda \neq 1$ и т.д.).

Проведенный анализ показывает, что при упругом взаимодействии крепи и массива обычная крепь не оказывает влияния на упругий массив, в общем случае на внешнюю границу крепи действуют нормальная и касательная нагрузки, а их величина и распределение зависят от жесткости крепи и условий на контакте ее с породой.

4.3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КРЕПИ СО СВОДАМИ ЕСТЕСТВЕННОГО РАВНОВЕСИЯ

4.3.1. Свод естественного равновесия (СЕР) чаще наблюдается в выработках на малых и средних глубинах разработки, когда разрушение пород вызывают растягивающие напряжения (см. 3.4).

На это проявление горного давления (рис. 4.4) ученые обратили внимание в первую очередь. Исходным было предположение, что на крепь выработки давит вес столба породы высотой H , затем появились более обоснованные гипотезы. Риттер (1879) считал, что от массива отрывается своим весом некоторый объем породы, Шульц (1867) рассматривал слои пород как изгибающиеся балки, жестко закрепленные на опорах; Бирбаумер (1913), Янсен (1895) и Киттер (1899) учитывали, что опускание пород над выработкой ослабляется трением его о боковые неподвижные породы; Энгессер (1882) рассчитывал параболический свод в виде кривой давления над крепью; Коммерелль (1912) высоту свода определял по прогибу кровли выработки; Греггер (1881) пробовал находить величину давления по излому установленной деревянной крепи. Все эти гипотезы и расчетные методы были проанализированы и подвергнуты критике М.М. Протодьяконовым (1874-1930).

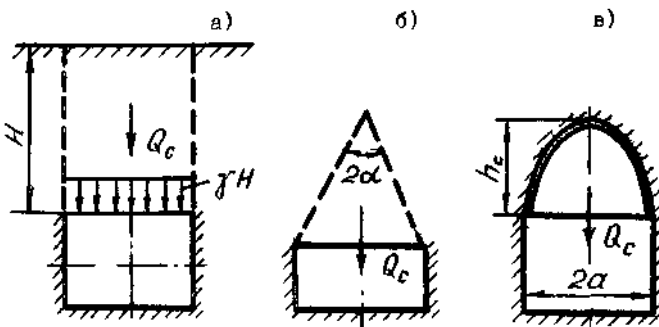


Рисунок 4.4 – Расчетные схемы давления крепи: а) столба пород; б) Бирбаумера; в) эллиптических и параболических сводов Риттера, Энгессера; Протодьяконова

4.3.2. *Гипотеза проф. М.М. Протодьяконова* ("Давление

горных пород на рудничную крепь"), развита в его диссертационной работе (1908) и проведена им путем моделирования сводообразования на лабораторном стенде с песком. Согласно этой гипотезе высота свода естественного равновесия (СЕР) определяется по очень простой формуле (рис. 4.4,в)

$$h = a / f_n, \quad (4.7)$$

где f_n - коэффициент крепости пород по М.М. Протодыяконову, для сыпучей среды $f_n = f_c = tg\rho$, для обычных пород $f_n \approx \sigma_{сж}/10$.

Вес свода обрушения на 1м длины выработки Q_c , если считать его параболическим, и давление на крепь q равны

$$Q_c = \frac{1}{3} \gamma \frac{a^2}{f_n}; \quad q = \frac{Q_c}{2a} = \frac{2}{3} \frac{\gamma a}{f_n} \quad (4.8)$$

где γ - объемный вес пород, кН/м³.

Согласно гипотезе Бирбаумера, высоту СЕР определяют по той же формуле (4.7), а вес свода и давление на крепь от свода треугольной формы равно

$$Q_c = \frac{1}{2} (2a \cdot h_c) = \gamma a^2 / f; \quad q = \frac{Q_c}{2a} = \frac{\gamma a}{2f} \quad (4.9)$$

т.е. результат отличается только численным множителем.

4.3.3. Упрощенный подход к определению давления на крепь при образовании СЕР стал классическим и наиболее показателен в расчетной схеме **Янсена** (1895), который рассматривал давление сыпучего на **дно бункеров и элеваторов** цилиндрической формы. Для протяженной выработки эту схему рассмотрел **Кеттер** (1899).

Рассматривают (рис. 4.5) столб породы над выработкой шириной $2a$, расположенной на глубине H в идеально связанном массиве. Для равновесия элементарного слоя единичной длины мощностью d_z на произвольной глубине z необходимо, чтобы сумма проекций всех **сил** (не напряжений!) на ось z была равна нулю:

$$\sum z = dQ + \sigma_z \cdot 2a - (\sigma_z + d\sigma_z) \cdot 2a - 2\tau \cdot dz = 0, \quad (4.10)$$

где $dQ = 2a\gamma \cdot dz$ - вес слоя;

σ_z - искомое давление на слой;

$\tau = (f\sigma_x + k)$ - касательные напряжения на контакте столба пород с неподвижным массивом;

$\sigma_x = \lambda_c \sigma_z$ - горизонтальное давление в массиве;

λ_c - коэффициент бокового распора в своде, для сыпучей среды

$$\lambda_c = (1 - \sin \rho) / (1 + \sin \rho);$$

f_c - коэффициент трения, для сыпучей среды $f_c = \operatorname{tg} \rho$;

$K = c \cdot f$ - коэффициент сцепления пород.

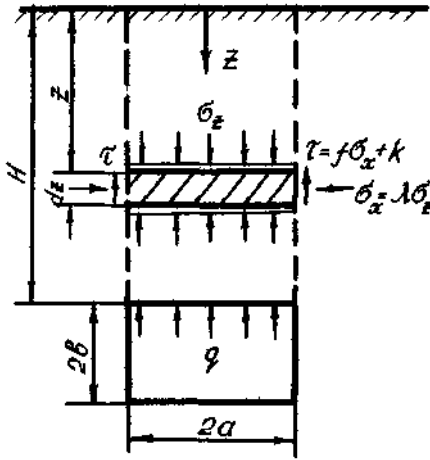


Рисунок 4.5 – Расчетная схема Янсена-Кеттера

Подставляя в (4.10) все значения и преобразуя, получим простейшее дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\sigma_z}{1 - \frac{\lambda_c f_c}{\gamma a - k} \sigma_z} = \frac{\gamma a - k}{a} dz$$

Прямое интегрирование с учетом очевидного граничного условия: при $z = 0$ $\sigma_z = 0$ дает решение

$$\sigma_z = \frac{\gamma a - k}{\lambda_c f_c} \left[1 - \exp\left(-\lambda_c f_c \frac{z}{a}\right) \right],$$

которое позволяет определить вертикальное давление в столбе на произвольной глубине z . **Давление на крепь** выработки $\sigma_z = q$ будет при $z=H$:

$$q = \frac{\gamma a - k}{\lambda_c f_c} \left[1 - \exp\left(-\lambda_c f_c \frac{H}{a}\right) \right] \quad (4.11)$$

Это классическая **формула Янсена-Кеттера**, вывод которой знают горные инженеры всего мира.

Для сыпучей среды коэффициент сцепления $k = 0$. Рассмотрим предельные случаи. Если H мало ($H \rightarrow 0$), то используя разложение показательной функции e^{-x} в степенной ряд $e^{-x} \approx 1 - x$, из (4.11) получим

$$q \approx \gamma H, \quad (H < a) \quad (4.12)$$

т.е. давление на крепь равно весу вышележащих пород.

Вторым предельным условием для формулы (4.11) является $H \rightarrow \infty$, что дает формулу

$$q \approx \gamma a / \lambda_c f_c, \quad (H \rightarrow \infty) \quad (4.13)$$

подобную (4.8) и (4.9) и отличающуюся только численным множителем.

4.3.4. Если над выработкой образуется СЕР, то формулу (4.11) Кеттера можно применить, если вместо глубины H ввести высоту свода h СЕР (рис. 4.6):

$$q_c = \frac{\gamma a - k}{\lambda_c f_c} \left[1 - \exp\left(-\lambda_c f_c \frac{h_c}{a}\right) \right], \quad (4.14)$$

где h_c можно вычислить из формулы, приведенной в модуле 2:

$$h_c = \left[\frac{a}{2\lambda_n} \left(1 - \lambda_m - \frac{\sigma_p}{p} \right) - b \right] \cdot \alpha_c, \quad (4.15)$$

где λ_m - коэффициент бокового распора в массиве, $0 \leq \lambda_m < 1$;

σ_p - прочность пород на растяжение в массиве;

p - максимальное напряжение в нетронутом массиве, чаще всего $p = \gamma H$;

H - глубина расположения выработки;

b - половина высоты выработки;

α_c - коэффициент учитывающий направленность образования СЕР в выработке; $\alpha_c = 2$ при сводообразовании только в кровле; $\alpha_c = 1$ - при СЕР в кровле и почве.

(Обратите внимание, что $\lambda_c \neq \lambda_m$. Объясните, почему?). При небольшом сцеплении $k \geq \gamma a$ давление на крепь отсутствует $q_c = 0$.

Интересны опыты проф. Булычева Н.С. по изучению давления на крепь вертикального ствола (рис. 4.7), проведенные на стенде с песком. Вокруг ствола глубинными реперами измеряли смещения и микродинамометрами - давление. Измерения проводили в процессе контролируемого уменьшения (податливости) диаметра крепи ствола. При этом вокруг ствола образовалась зона 1 начальных смещений (рис. 4.7,а), внутри которой впоследствии выделился сползающий объем песка 2. На поверхности модели явно обозначилась мульда оседания 3.

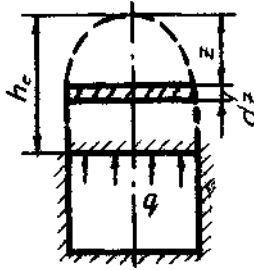


Рисунок 4.6 – Давление на крепь при образовании СЕР

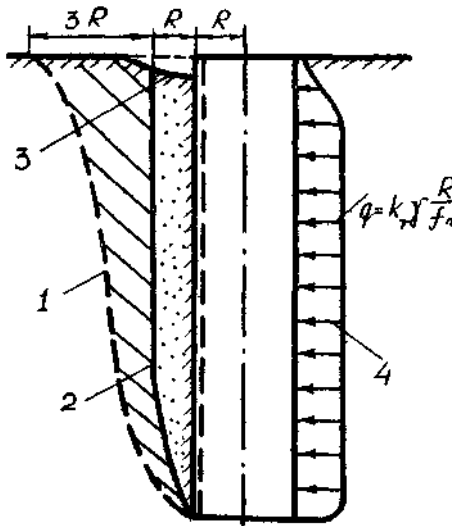


Рисунок 4.7 – Зоны смещений (а) и давления на крепь (б) ствола (по Н.С. Булычеву)

Давление на крепь ствола при ее податливости резко уменьшилось до постоянного минимума, почти независимого от глубины (рис.4.7,б).

Проф. Булычевым Н.С. была предложена формула для определения нагрузок на крепь стволов

$$q = k_T \gamma R / f_n, \quad (4.16)$$

где k_T - эмпирический коэффициент, учитывающий тип крепи и технологию ее возведения, $1 \leq k_T \leq 5$.

Эта формула подобна формулам (4.8), (4.9), (4.13). Такое совпадение не случайно и свидетельствует об общих **закономерностях** формирования нагрузки на крепь при сводообразовании:

нагрузка пропорциональна ширине и не зависит от формы, размеров и глубины расположения выработки;

нагрузка на крепь не зависит от деформационно-прочностных свойств горных пород, режима работы и технологических схем возведения крепи, крепь взаимодействует с породами в режиме заданной нагрузки.

Чем больше размер зоны разрушения, тем больше нагрузка на крепь, даже при минимальном сцеплении пород ($k \geq \gamma \alpha$) согласно (4.14) нагрузка равна нулю.

Только в схеме ДГМИ благодаря формуле (4.15) учтены оба главных размера выработки (a, b), напряженное состояние массива горных пород (p, λ), прочности пород σ_p .

(Проанализируйте остальные расчетные схемы, подумайте: в чем и как их можно улучшить?).

4.3.5. Давление с боков выработки

Простейшая расчетная схема давления разрушенной породы на крепь с боков выработки предложена Бирбаумером (1913) и проф. Цымбаревичем П.М. (1948) исходя из аналогии давления сыпучего на **подпорную стенку** (рис. 4.8) высотой h .

Если предположить, что сыпучее находится в **предельном** напряженном состоянии, подпорная стенка абсолютно гладкая, то вертикальное σ_b и горизонтальное σ_r давление на глубине z равны

$$\sigma_b = \sigma_1 + \gamma z; \quad \sigma_r = \lambda_c \sigma_b = \lambda_c (\sigma_1 + \gamma z), \quad (0 \leq z \leq h) \quad (4.17)$$

где σ_1 - давление на поверхность сыпучего, Па;

γ - объемный вес сыпучего, Н/м³;

λ_c - коэффициент бокового распора сыпучего в предельном состоянии:

$$\lambda_c = (1 - \sin \rho) / (1 + \sin \rho) = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \rho/2), \quad (4.18)$$

ρ - угол внутреннего трения сыпучего.

Согласно (4.17), эпюр горизонтального давления на подпорную стенку имеет вид **трапеции** (см. рис. 4.8), а разница давлений сверху и снизу стенки равно $\lambda_c \gamma h$.

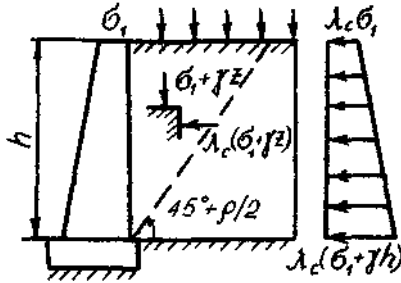


Рисунок 4.8 – Давление сыпучего на подпорную стенку

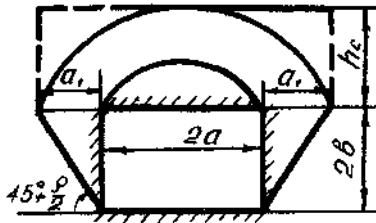


Рисунок 4.9 – Схема проф. Р.М.Цымбаревича

Полученные соотношения переносятся как аналог на расчетную схему определения давления с боков выработки (Рис. 4.9). Согласно расчетной схеме проф. П.М. Цымбаревича, в боках выработки образуются **призмы сползания**, которые увеличивают пролет выработки на величину $2a$. Поэтому высоту свода h следует определять по формуле (4.15) с учетом увеличенной ширины выработки $2(a+a_1)$

$$a_1 = 2b \operatorname{tg}(45^\circ - \rho/2).$$

Вертикальный пригруз на призму сползания со стороны свода высотой h_1 с запасом полагают равным $\sigma_1 = \gamma h_c$. Тогда, используя формулу (4.17) для подпорной стенки, определяют **давление с боков** выработки:

$$q_B = \lambda_c \gamma (h_c + z), \quad (0 \leq z \leq 2b). \quad (4.19)$$

Равнодействующую бокового давления Q_B найдем, интегрируя (4.18):

$$Q_B = \int_0^{2b} q_B \cdot dz = 2\lambda_c \gamma b (h_c + b), \quad (4.20)$$

Разумеется, такой расчет является сугубо приближенным и пригоден для III категории устойчивости выработки, когда основной формой горного давления является разрушение пород в кровле от растяжения, ведущее к сводообразованию.

(Докажите второе равенство в (4.18). Какую гипотезу можно принять вместо $\sigma_1 = \gamma h_c$? Проинтегрируйте (4.20) и объясните, какой режим работы крепи здесь предлагается? Какие предложения (гипотезы) в этом разделе малообоснованы? Что вы можете предложить взамен их?).

4.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КРЕПИ С ЗОНОЙ НЕУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ (ЗНД)

4.4.1. При образовании вокруг выработки ЗНД (см. модуль 3) необходимо рассмотреть особенности ее взаимодействия с крепью выработки. На первом этапе целесообразно изучить упрощенную (идеализированную) расчетную схему: в гидростатически напряженном массиве ($\lambda = 1$) однородных пород находится круглая выработка (рис. 4.10) радиуса a . В выработке установлена податливая крепь с отпором q . Если локальный критерий устойчивости $\omega_* > 1$, вокруг выработки образуется кольцевая ЗНД с двумя семействами линий скольжения в виде логарифмических спиралей (см. модуль 3). При решении этой задачи необходимо определить напряженно-деформированное состояние массива, т.е. распределение напряжений,

деформаций и смещений внутри ЗНД ($a \leq r \leq r_*$) и вне ее границы r_* ($r_* \leq r \leq \infty$), заодно вычислить и протяженность ЗНД ($r_* = ?$).

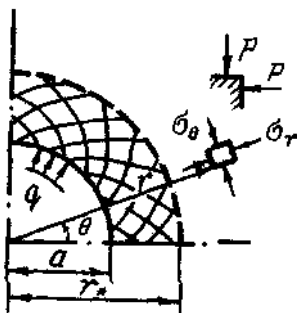


Рисунок 4.10 – К расчету взаимодействия крепи с ЗНД

Задача механики горных пород является **плоской** (деформации $\varepsilon_z = const$) и решается в **полярной** системе координат r, θ с полюсом в центре выработки. В силу сделанных ранее предположений решение будет **осесимметричным** (все исходные параметры, a , значит и все искомые переменные, не зависят от угловой координаты θ).

4.4.2. Все подобные задачи механики подземных сооружений решаются исходя из системы уравнений, которые включают:

а) уравнения равновесия (в нашем случае - оно одно):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_0}{r} = 0, \quad a \leq r < \infty; \quad (4.21)$$

б) уравнения совместности деформаций

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0, \quad (a \leq r < \infty) \quad (4.22)$$

где, $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ - радиальные и тангенциальные деформации
в) геометрические уравнения

$$\varepsilon_r = \frac{dU}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (4.23)$$

где U - радиальное смещение,
 г) физические уравнения, показывающие связь между напряжениями и деформациями:

в упругой зоне обобщенный закон Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_*}(\sigma_r - \nu_*\sigma_\theta); \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E_*}(\sigma_\theta - \nu_*\sigma_r); \quad \gamma_{r\theta} = \tau_{r\theta}/G, \quad (r_* \leq r < \infty) \quad (4.24)$$

где $\nu_* = \frac{\nu}{1-\nu}$; $E_* = \frac{E}{1-\nu^2}$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$,

и условие прочности $F_y(\sigma_\theta^y, \sigma_r^y) = 0$

в зоне неупругих деформаций (ЗНД) условие пластичности (прочности)

$$F_n(\sigma_\theta^n, \sigma_r^n) = 0 \quad (a_* \leq r \leq r_*) \quad (4.25)$$

и связь между деформациями

$$\varepsilon_r = -\alpha_0 \varepsilon_\theta \quad (4.26)$$

где - a параметр разрыхления, $\alpha_0 \geq 0$.

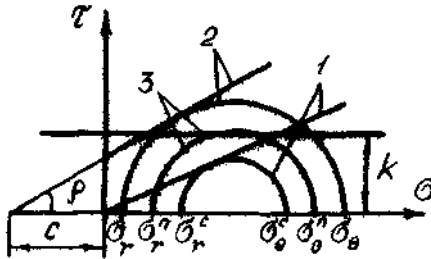


Рисунок 4.11 – Паспорт прочности на диаграмме О.Мора для различных пород

Мы рассмотрим простейшие *условия прочности* для горных пород (рис. 4.11): 1 - идеально сыпучее тело (типа песка), 2 - идеально вязное тело, чье уравнение пригодно для большинства горных пород при $\sigma_1 > \sigma_{сж}$, 3 - идеально пластичное тело (типа глин, слабых аргиллитов).

4.4.3. Для решения системы уравнений (4.21)-(4.26) необходимо задать граничные условия, которые необходимы для определения постоянных интегрирования дифференциальных уравнений (4.21), (4.22). Зададим статические граничные условия, при которых на каждой из границ заданы напряжения:

на контуре горной выработки при $r = a$

$$\sigma_r = q; \tau_{r\theta} = 0 \quad (4.27)$$

где q - равномерный отпор крепи;

вдали от выработки вне зоны ее влияния при $r \rightarrow \infty$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = p; \tau_{r\theta} = 0 \quad (4.28)$$

где p - гидростатическое поле напряжений, часто принимают $p = \gamma H$; на границе ЗНД при $r = r_*$

$$\sigma_r^y = \sigma_r^n; U^y = U^n; F_y(\sigma_r^y, \sigma_\theta^y = 0) \quad (4.29)$$

Здесь индексы "y" и "n" относятся к упругой и пластической зонам соответственно.

Последнее уравнение в (4.29) является *условием прочности* F_y на границе упругой зоны при $r = r_*$. Это условие не обязательно совпадает с условием прочности в пластической зоне F_n (т.е. в ЗНД), что очень важно при решении практических задач.

Благодаря статическим граничным условиям задача является *статически определимой*, что позволяет получить решение в напряжениях без рассмотрения уравнений (4.22), (4.23).

4.4.4. Идеально-пластическая ЗНД

Условие прочности для идеально-пластического тела (рис. 4.11)

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r = 2k \quad (4.30)$$

где k - сцепление породы, $k = 0,5\sigma_{сж}$

подставим в уравнение равновесия (4.20) и после некоторых преобразований получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$d\sigma_r = k \frac{dr}{r}.$$

Неопределенный интеграл от каждого члена этого уравнения равен

$$\sigma_r = k \ln r + c_0, \quad (*)$$

где c_0 - постоянная интегрирования, определяемая из граничных условий (4.25), которые следует подставить в предыдущее равенство, что дает

$$c_0 = q - k \ln a,$$

а окончательно после подстановки c_0 в (*) получим искомые соотношения для напряжений в ЗНД

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= q + k \ln(r/a), \\ \sigma_{\theta} &= q + 2k + k \ln(r/a), \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} (a \leq r \leq r_*) \quad (4.31)$$

Распределение напряжений **в упругой зоне** легко определить, если считать, что на границе ЗНД $r = r_*$ действует напряжение

$$\sigma_r^* = q + k \ln(r_*/a), \quad (4.32)$$

как равномерный отпор крепи в круглой выработке радиуса r_* (см. модуль 2)

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = p \mp (p - \sigma_r^*) \frac{r_*}{r}; \quad r_* \leq r < \infty \quad (4.33)$$

В этом уравнении учтены граничные условия (4.27). Определим неизвестный радиус r_* ЗНД, для чего используем условие прочности (4.29), подставив в него упругие напряжения (4.33) при $r = r_*$

$$\sigma_\theta^* = \sigma_\theta^{y*}; \quad 2p - \sigma_r^* = q + 2k + k \ln(r_*/a)$$

подставляя в него (4.32) и решая относительно r_* , получим:

$$r_* = a \exp \frac{p - k - q}{k}. \quad (4.34)$$

Таким образом, уравнения (4.31), (4.33) и (4.34) являются решением задачи в напряжениях.

Найдем смещения пород U внутри горной выработки, для чего в уравнение совместности деформаций (4.21) следует подставить условие (4.25) и проинтегрировать дифференциальное уравнение (сделать самостоятельно), что дает

$$\varepsilon_\theta = c_1 r^{-(1+\alpha_0)} \quad (4.35)$$

где c_1 - постоянная интегрирования, которую следует определить из граничного условия (4.28) для радиальных смещений U ;

α_0 - параметр разрыхления в (4.25), для идеальной пластичности $d=1$. Воспользовавшись (4.22), найдем

$$u = \varepsilon_\theta r = c_1 r^{-\alpha_0}, \quad (4.36)$$

а, поскольку при $r = r_*$, $u = u_*$, после подстановки в (4.36), получим

$$c_1 = u_* r_*^{\alpha_0}, \quad (4.37)$$

где u_* - радиальные смещения на границе ЗНД, которые определяем как упругие смещения контура круглой выработки радиуса r_* с крепью

$q_* = \sigma_r^*$ (см. модуль 2)

$$u_* = r_*(p - \sigma_r^*) / 2G, \quad (4.38)$$

где G - модуль сдвига пород.

Подставляя (4.32), (4.38) и (4.37) в (4.36), определим **радиальные** смещения пород U в ЗНД на любом расстоянии от контура r с учетом $d_0=1$:

$$u = \frac{\gamma_*^2}{2Gr} \left(p - q - k \ln \frac{r_*}{a} \right), \quad (a \leq r \leq r_*), \quad r = a \quad (4.39)$$

На контуре горной выработки $r = a$ смещения u_a получим из (4.39) с использованием (4.34):

$$u_a = a \frac{p + k - q}{4G} \exp \frac{p - k - q}{k}, \quad (r = a) \quad (4.40)$$

Таким образом, формулы (4.39) и (4.40) полностью описывают смещения пород в ЗНД.

4.4.5. **Образование ЗНД в идеально-сыпучей среде** (задача Р. Феннера, 1938)

Отличие этой задачи в условии прочности (пластичности) для сыпучей среды, когда она находится в **предельном** состоянии (см. рис. 4.11)

$$\sigma_\theta = A \sigma_r, \quad (4.41)$$

где A - параметр угла внутреннего трения ρ

$$A = (1 + \sin \rho) / (1 - \sin \rho).$$

Решение задачи аналогично решению в п. 4.3.1 для идеально пластической среды. Подставим (4.41) в уравнение равновесия (4.20) и получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\sigma_r}{\sigma_r} = (A-1) \frac{dr}{r}, \quad (4.42)$$

решением которого является (получите сами!):

$$\sigma_r = c_1 r^{A-1} \quad (4.43)$$

Постоянную интегрирования c_1 определим, подставляя в это уравнение граничное условие: при $r = a$; $\sigma_r = q$

$$q = c_1 a^{A-1}; \quad c_1 = qa^{-(A-1)}$$

Подставляя c_1 в (4.43) и используя (4.41), получим решение задачи в напряжениях:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= q(r/a)^{A-1} \\ \sigma_\theta &= Aq(r/a)^{A-1} \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

В упругой зоне распределение напряжений описывается формулой (4.33).

Определим неизвестный радиус r_* ЗНД, используя условия $\sigma_r^n = \sigma_r^y$ на $r = r_*$, и уравнения (4.33) и (4.41):

Из (4.33) $\sigma_\theta^* = 2p - \sigma_r^*$, из (4.44) $\sigma_r^* = q(r_*/a)^{A-1}$ подставляя эти значения в равенство $\sigma_\theta^* = A\sigma_r^*$, получим

$$2p - q(r_*/a)^{A-1} = Aq(r_*/a)^{A-1},$$

и окончательно для искомого радиуса ЗНД:

$$r_* = a \left[\frac{2p}{(A+1)q} \right]^{\frac{1}{A-1}}. \quad (4.45)$$

Задача в напряжениях решена. При определении смещений пород все зависимости (4.35)-(4.38) остаются в силе. Подставляя в (4.36) с учетом (4.37) и (4.38), получим:

$$u = \frac{r}{2G} \left[p - q \left(\frac{r_*}{a} \right)^{A-1} \right] \left(\frac{r_*}{r} \right)^{\alpha+1}, \quad (4.46)$$

Смещение u_a на контуре выработки $r = a$ с учетом (4.45) будут равны

$$u_a = a \frac{A-1}{A+1} \frac{p}{2G} \left[\frac{2p}{(A+1)q} \right]^{A+\alpha_0}, \quad (4.47)$$

где $\alpha_0 = f(A)$ – параметр разрыхления (дилатансии), учитывающий увеличение объема сыпучего при сдвиговых деформациях, зависит от угла внутреннего трения пород.

Оценка параметра разрыхления α_0

При переходе среды в предельное состояние в каждой ее точке соблюдается условие пластичности (4.24), называемое **пластическим потенциалом**:

$$F_n(\sigma_\theta, \sigma_r) = 0$$

В теории пластического потенциала доказывается, что деформации определяются равенствами

$$\varepsilon_{\theta} = \lambda_0 \frac{dF_n}{d\sigma_{\theta}}; \quad \varepsilon_r = \lambda_0 \frac{dF_n}{d\sigma_r}$$

где λ_0 - коэффициент пропорциональности.
Пластический потенциал для сыпучей среды

$$F_n = \sigma_{\theta} - A\sigma_r = 0$$

Подставив в предыдущие соотношения и исключив λ_0 , получим искомое равенство:

$$\varepsilon_r = -A\varepsilon_{\theta}, \quad \varepsilon_y = 0$$

Следовательно, параметр разрыхления для сыпучей среды равен $a_0 = A$. Нетрудно убедиться, что для *идеально связной* среды также $a_0 = A$, а у идеально пластичной породы $a_0 = 1$ (доказать самостоятельно!).

Определим объемную деформацию ε_v среды в предельном состоянии:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_y = -(A-1)\varepsilon_{\theta}.$$

Следовательно, при разрушении пород происходит дилатансия (увеличение объема) *за счет сдвиговых* деформаций. Для идеальной пластичности, у которой угол внутреннего трения $\rho = 0$ и $A = 1$, пластическое деформирование происходит без изменения объема $\varepsilon_v = 0$.

4.4.6. Образование ЗНД в идеально-связной среде (решение А. Лабасса, 1949г.)

Идеально-связная среда (см. рис. 4.11) обладает удельной силой сцепления C и углом внутреннего трения ρ .

Решение задачи об образовании ЗНД во всем аналогично п. 4.3.2 (читателю рекомендуется сделать вывод самостоятельно).

Легко заметить, что предельная огибающая идеально-связной породы получена из паспорта для сыпучего переносом влево на "с"

начала координат на паспорте прочности диаграммы О.Мора (см. рис. 4.11). Поэтому все формулы п. 4.3.2 оказываются пригодными для связной среды в ЗНД, если положить для нормальных напряжений $\sigma_n^c = \sigma_n + c$, т.е. все нормальные напряжения увеличить на удельную силу сцепления c . Получаем:

условие прочности

$$\sigma_\theta + c = (\sigma_r + c)A, \quad (4.48)$$

напряжения в пределах ЗНД

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (q+c)(r/a)^{A-1} - c \\ \sigma_\theta &= A(q+c)(r/a)^{A-1} - c \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} (\alpha \leq r \leq r_*); \quad (4.49)$$

напряжения в упругой зоне - по формуле (4.33), радиус зоны неупругих деформаций r_* :

$$r_* = a \left[\frac{2(p+c)}{(A+1)(q+c)} \right]^{1/(A-1)} \quad (4.50)$$

смещения внутри ЗНД $a \leq r \leq r_*$:

$$u = \frac{r}{2G} \left[p+c - (q+c) \left(\frac{r_*}{r} \right)^{A-1} \right] \left(\frac{r_*}{r} \right)^{A+1}, \quad (4.51)$$

смещения на контуре горной выработки

$$u_a = a \frac{A-1}{A+1} \frac{(p+c)}{2G} \left[\frac{2(p+c)}{(A+1)(q+c)} \right]^{2A} \quad (4.52)$$

Однако это решение имеет существенный недостаток: в формулах (4.49) считается, что среда внутри ЗНД переходит в предельное напряженное состояние, не разрушаясь (т.е. сохраняя полностью сцепление c). На самом деле после разрушения среда снизит свою прочность. Это отметил проф. Либерман Ю.М. (1969 г.) и предложил считать, что в ЗНД порода уподобится сыпучей среде (без сцепления), а в упругой зоне останется неразрушенной.

В ЗНД напряжения будут такими же, как и в сыпучей среде (4.44), а в упругой зоне их можно вычислить по формулам (4.33). Однако радиус ЗНД будет иной и для его определения необходимо подставить в условие прочности (4.48) напряжения из (4.33), учитывая равенства $\sigma_{\kappa}^* = q(r_*/a)^{A-1}$ и $(A-1)c = \sigma_{\text{сж}}$, где $\sigma_{\text{сж}}$ - прочность пород на одноосное сжатие. Выполнив несложные преобразования, получим:

$$r_* = a \left(\frac{2p - \sigma_{\text{сж}}}{(A+1)q} \right)^{1/(A-1)}. \quad (4.53)$$

Остальные соотношения будут подобны ранее полученным для сыпучей среды (рекомендуется сделать вывод их самостоятельно).

4.4.7. **Закономерности взаимодействия** крепи с массивом при образовании ЗНД.

В табл. 4.1 приведены зависимости, полученные при решении задач об образовании ЗНД вокруг круглой выработки для разных моделей поведения пород в предельном состоянии (при разрушении). Из анализа полученных зависимостей вытекают следующие **закономерности**:

нагрузка на крепь q прямо пропорциональна исходному напряженному состоянию массива (в частном случае - весу вышележащих пород) и **не зависит** от размеров выработки;

чем больше радиус ЗНД r_* , тем меньше нагрузка на крепь q , тем больше смещения u пород в выработку;

в разрушенной (сыпучей) среде выработка без крепи $q = 0$ существовать не может и происходит ее завал ($u \rightarrow \infty$);

в породах с остаточной прочностью или пластичных (идеально-

связная или пластичная среды) роль отпора крепи пренебрежимо мала и выработка может существовать без крепления;

отпор крепи q оказывает существенное влияние на радиус ЗНД, а напряжения внутри ЗНД *не зависят* от исходного напряженно-деформированного состояния массива.

Эти закономерности разительно отличаются (в чем?) от таковых для сводов естественного равновесия и характерны для больших глубин разработки (почему?).

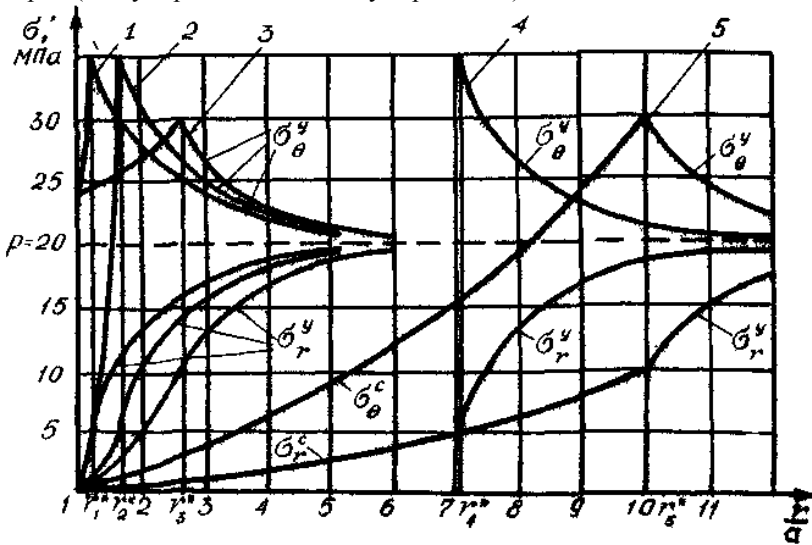
Чтобы получить представление о распределении радиальных σ_r и тангенциальных σ_θ напряжений при образовании ЗНД в породах с различными моделями поведения, был проведен сопоставительный расчет для круглой горной выработки радиуса a , пройденной на глубине $H = 800$ м в алевролитах прочностью $\sigma_{сж} = 20$ МПа и углом внутреннего трения $\rho = 30^\circ$. В выработке установлена податливая крепь с отпором $q = 0.1$ МПа.

Графики изменения напряжений и в зависимости от относительного радиуса r/a представлены на рис. 4.12. Как видно из графика, несмотря на полное совпадение исходных данных, проявления горного давления существенно различаются для разных моделей поведения пород, о чем можно судить, сравнивая размеры радиусов r_* ЗНД показанные на горизонтальной оси. Наибольший радиус ($r_5^* = 10a$). У ЗНД для идеально сыпучих пород (5), а наименьший ($r_1^* = 1,22a$) - в случае идеально-связной среды (1). Все остальные модели занимают промежуточное положение. Модель проф. Ю.М.Либермана (4) имеет характерное отличие - скачок напряжений σ_0 на границе ЗНД $r = r_4^*$ на величину прочности пород $\sigma_{сж} = 20$ МПа, что характеризует переход от полностью разрушенных пород к связным. Разумеется, это расчетная идеализация.

(Проанализируйте распределение напряжений σ_r и σ_θ вокруг выработки до и после радиуса ЗНД. Обратите внимание на симметричность графиков σ_r^y и σ_θ^y в упругой зоне для всех моделей - это следствие формулы (4.33) для осесимметричной задачи. Какие реальные породы соответствуют каждой из моделей?).

Чтобы наглядно представить, как изменяется прочность породы вглубь массива, следует обратиться к рис. 4.13, где в нормированных координатных осях (относительный размер ЗНД и относительная

прочность изменяются от 0 до 1) приведены графики для всех моделей пород (их нумерация соответствует рис. 4.12).



1 – идеально связанная среда; 2 – среда ДГМИ с разупрочнением; 3 – идеально пластичная среда; 4 – среда проф. Либермана; 5 – идеально сыпучая среда
 ($r_1^* = 1.22a$; $r_2^* = 1.71a$; $r_3^* = 2.73a$; $r_4^* = 7.1a$; $r_5^* = 10a$)

Рисунок 4.12 – Рафики изменения σ_r (нижние ветви) и σ_θ В (верхние ветви) вокруг выработки:

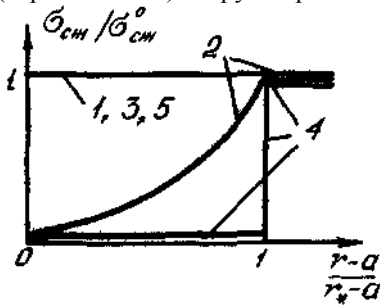


Рисунок 4.13 – Изменение прочности пород в ЗНД для разных моделей

Моделям 1, 3, 5 соответствует неизменная прочность от контура вглубь массива, причем для модели 3 (идеально-сыпучая среда), у которой прочность всюду равна нулю, неопределенность $0/0$, раскрытая по правилу Лопиталья, также дает 1. Модель 4 (проф. Либермана) изменяет свою прочность скачком, а модель 2 (ДГМИ) демонстрирует постепенный рост прочности пород от 0 до 1 по мере удаления от контура выработки $r = a$ до границы ЗНД $r = r_*$.

(Рекомендуется путем составления программы и вычислений на ЭВМ проследить изменение γ_* , u , q , σ_r и σ_0 для различных моделей пород при изменении горно-геологических условий. Какая из моделей лучше всего соответствует реальности?).

4.5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЯВЛЕНИЙ ГОРНОГО ДАВЛЕНИЯ

4.5.1. Понятия о моделировании явлений

Модель понимают как копию (точную или приближенную) объекта или процесса, свойства которого изучают (исследуют). Потребность в модели возникает там, где ставится какая-то задача, где определена цель, которую нужно достигнуть. В модели всегда отражено самое главное, самое характерное из того, что присуще процессу или устройству. Многообразие моделей приводит в одних случаях к научным открытиям, в других - к разработке новых устройств с новыми характеристиками.

Метод модели (моделирование) представляет собой особый метод экспериментального исследования, сущность которого заключается в замещении объекта исследования: вместо заданного явления - образца (натуры) исследованию подвергается другое явление, ему подобное - модель.

Различают модели нескольких видов.

Математическая модель строится на основе математических способов отражения действительности - чисел, формул, уравнений, алгоритмов (моделирование на ЭВМ).

Физическая модель основана на изготовлении макета устройства, геометрически подобного натуре (оригиналу) и удовлетворяющего ряду условий подобия (модели на эквивалентных материалах).

Аналоговое моделирование основано на том, что процессы

разной физической природы описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями (например, уравнение Лапласа описывают фильтрацию, температурные поля, распределение напряжений). Это дает возможность изучать на модели один процесс, а по аналогии делать выводы о закономерностях подобного процесса другой физической природы.

4.5.2. Понятие о теории размерностей

Для построения модели необходимо выделить основные факторы данного процесса (определяющие параметры), правильно схематизировать явление.

Совокупности размерных и безразмерных переменных и постоянных величин, полностью определяющих изучаемый процесс, называются *определяющими параметрами*. Их число должно быть минимальным и определяются π -теоремой анализа размерностей, которая устанавливает связь между:

- 1) определяющими параметрами и их число обозначается через N ;
- 2) числом n основных единиц измерения, через которое могут быть выражены эти характеристики;
- 3) числом π независимых безразмерных комбинаций характеристик, определяющее изучаемое явление.

Эти комбинации и определяют условия подобия, т.е. являются его критериями, согласно π -теореме число этих критериев равно:

$$\pi = N - n. \quad (4.54)$$

Рассмотрим классический пример малых колебаний математического маятника в среде без сопротивления. Для характеристики этого маятника достаточно знать длину l маятника, его массу m , угол начального отклонения α_0 . Колебаться маятник заставляет сила тяжести, которая зависит от массы m и ускорения g . Таким образом, условия подобия включают пять определяющих параметров $N = 5$

$$T_0 = f(q, l, m, \alpha_0),$$

независимых размерностей из которых три $n = 3$

$$[N_0] = T; [q] = L/T^2; [l] = L, [m] = M; [\alpha_0] = 1.$$

Следовательно, можно составить всего два безразмерных критерия:

$$\pi = N - n = 5 - 3 = 2.$$

Масса m не дает безразмерных комбинаций ни с одной из размерных величин, поэтому масса не оказывает влияния на условия подобия. Этот факт известен из теории колебаний: период колебаний не зависит от массы маятника. Обе безразмерные комбинации можно представить в виде

$T_0^2 q / l$ и α_0 , а общий вид искомой зависимости должен иметь вид

$$T_0^2 \cdot q / l = f(\alpha_0)$$

или

$$T_0 = \sqrt{l/q} \cdot f(\alpha_0)$$

Разлагая неизвестную функцию $f(\alpha_0)$ в ряд с учетом ее четности

$$f(\alpha_0) = f(-\alpha_0)$$

$$f(\alpha_0) = c_0 + c_1 \alpha_0^2 + c_2 \alpha_0^4 \dots$$

и оставляя при малом α_0 только первый член $f(\alpha_0) = c_0$, получим

$$T_0 = c_0 \sqrt{\frac{l}{q}}.$$

Из теории колебаний известно, что $c_0 = 2\pi$. Теория размерностей позволила найти закон колебаний маятника (с точностью до постоянного множителя), не рассматривая уравнений его движения. Конечно, только изучение физических закономерностей и сущности процесса приводит к правильному выбору основных характеристик и плодотворному применению теории подобия и размерностей. В большинстве своем число размерностей n намного меньше изучаемых параметров N и отыскание искомым зависимостей значительно усложняется, заставляя исследователя прибегать к моделированию с помощью теории подобия.

4.5.3. Основные теоремы теории подобия

Теория подобия дает возможность теоретически обосновать экспериментальные исследования изучаемого явления методом моделирования, т.е. она является *теоретической базой эксперимента*. С ее помощью устанавливаются условия, при которых результаты экспериментов любого явления на моделях можно перенести на подобные процессы в натуре.

Понятие подобия распространяется на любые реальные процессы, даже самые сложные. Основные положения теории подобия формулируют в виде трех теорем:

Первая теорема подобия (о необходимых условиях): "Подобные между собой процессы имеют одинаковые критерии подобия".

Следовательно, если у первого процесса безразмерные критерии подобия обозначены Π_1^i , а у второго процесса соответственно Π_2^j ($1 \leq j \leq m$), где m - общее число критериев (чему равно их число?), то для подобных процессов должно соблюдаться равенство одноименных критериев подобия:

$$\Pi_1^i = \Pi_2^i; \Pi_1^i = \Pi_2^i; \Pi_1^i = \Pi_2^i; \dots \Pi_1^m = \Pi_2^m$$

Вторая теорема подобия (π -теорема): "Функциональная зависимость между характеризующими процесс переменными может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия".

$$f(\Pi'; \Pi''; \dots; \Pi; \dots) = 0$$

Теорема дает значительные упрощения и снижение объема экспериментальных исследований, поскольку число безразмерных критериев меньше числа основных факторов N (на какую величину?).

Третья теорема подобия (о достаточных условиях подобия): "Достаточным условием подобия двух систем является равенство соответствующих критериев подобия этих систем, составленных из их основных параметров и краевых условий".

Как видим, в третьей теореме сформулировано требование соблюдения начальных (граничных) условий.

Чтобы из целого класса явлений выделить конкретный единичный процесс, необходимо соблюдение **условий однозначности**:

- 1) геометрических условий, характеризующих сохранение формы при изменении размеров области, в которой протекает процесс;
- 2) физических условий, задающих подобие физических свойств в модели и натуре;
- 3) краевых условий, задающих подобие протекания процессов на границах тела (граничные условия) и во времени (начальные условия).

Таким образом, два явления считаются физически подобными, если по характеристикам одного явления (модели) можно получить характеристики другого (натуры) простым умножением на коэффициенты, зависящие только от размерности. Эти коэффициенты представляют собой числа и иногда называют **масштабными**.

Наиболее простыми являются условия механического и, в особенности, геометрического подобия и нередко считаются достаточными для большинства механических процессов в горном массиве (деформации, смещения, хрупкое разрушение, перераспределение силовых полей в горных породах). Однако в настоящее время широко начинают изучаться с помощью моделирования тепловые, гидро- и газодинамические, фильтрационные, электромагнитные и другие физические процессы, происходящие в массиве горных пород при ведении горных работ.

Чем меньше число параметров, тем проще установить закономерности изучаемого явления без теории подобия и размерностей. Наоборот, чем больше число параметров и чем сложнее закономерности, тем важнее правильный выбор основных единиц и

тем полезнее теория подобия и анализ размерностей.

4.5.4. Метод эквивалентных материалов

Представляет собой моделирование механических процессов проявлений горного давления в массиве и разработан проф. Кузнецовым Г.Н. (1936 г.). Метод нашел широкое применение при исследовании горного давления в подземных выработках во многих исследовательских институтах и вузах.

Сущность метода состоит в создании модели породного массива со всем его структурным строением из искусственных (эквивалентных) материалов, механические свойства которых пропорционально изменены (как правило, уменьшены) по сравнению с истинными свойствами природы.

Применим теорию подобия и размерностей для моделирования механических процессов в горном массиве.

1. Перечислим все размерные и безразмерные параметры, существенные для моделирования упругих деформаций: ν (коэффициент Пуассона), E (модуль упругости), l (характерный линейный размер), pg (удельный вес пород), P (характерная величина сил). Следовательно, в данном случае $N = 5$.

2. N параметров выражаются через n основных единиц измерения ($n \leq N$), в данном случае $n = 2$, так как все размерные величины выражены в ньютонах и метрах.

3. Из N величин составим $N - n$ независимых безразмерных комбинаций, в данном примере $5 - 2 = 3$ комбинации:

$$\nu, \frac{E}{q\rho l}, \frac{P}{E l^2} \quad (4.55)$$

Следовательно, деформации $= /E$ будут функцией этих трех параметров. Зная механические характеристики материала природы ν_n, E_n, ρ_n , задавшись масштабом геометрического подобия в виде соотношения линейных размеров модели l_m и природы $l_n, \alpha_l = l_m / l_n$, и масштабом для плотностей природы и эквивалентного материала $\alpha_\rho = \rho_m / \rho_n$, получим значения механических свойств материала модели, которые необходимы для удовлетворения требований подобия. Из второго критерия подобия (1.55) получим:

$$\left(\frac{E}{q\rho\ell} \right)_M = \left(\frac{E}{q\rho\ell} \right)_H; \alpha_E = \frac{E_M}{E_H} = \frac{(q\rho\ell)_M}{(q\rho\ell)_H} = \alpha_\ell \alpha_\rho, \quad (4.56)$$

Такие искусственные материалы, которые удовлетворяют критериям подобия природы и модели, называются эквивалентными.

Все величины, имеющие размерность E (напряжения, прочностные свойства) должны удовлетворять условию (1.56). Масштабный коэффициент для сил определяем из третьего критерия подобия:

$$\left(\frac{P}{E\ell^2} \right)_M = \left(\frac{P}{E\ell^2} \right)_H; \alpha_P = \frac{P_M}{P_H} = \frac{(E\ell^2)_M}{(E\ell^2)_H} = \alpha_E \alpha_\ell^2 = \alpha_\rho \alpha_\ell^3. \quad (4.57)$$

Для безразмерной величины коэффициента Пуассона получаем

$$\nu_M = \nu_H; \alpha_\nu = 1$$

Таким образом, при полном соблюдении условий подобия получают возможность моделировать большинство случаев проявлений горного давления в толще пород, окружающих выработку, когда основной действующей силой является **сила тяжести**, вызывающая появление напряжений в толще пород и последующее их перераспределение при проведении выработок.

Поскольку линейные размеры в модели значительно (в 10..100 раз) меньше, чем в природе, а плотности породы и материала одного порядка 1, то для удовлетворения соотношения (4.56) эквивалентные материалы должны иметь модуль упругости и прочностные характеристики во столько же раз меньше, чем в природе у горных пород. Это создает больше сложности в подборе эквивалентных материалов, в качестве которых применяют парафино-песчаные, песчано-гипсовые смеси и др.

Если необходимо моделировать процессы **разрушения** пород вокруг выработки, а напряжения в модели создают дополнительным пригрузом, который значительно больше собственного веса конструкции, то величины **веса и плотности**, а, следовательно, и

второй параметр в (1.55) ($E / q\rho l$) *несущественны*.

Тогда деформации являются функциями лишь ν и $p / E l^2$, и поэтому подобие сохраняется при $\nu = const$ и $p / E l^2 = const$. Последнее соотношение не что иное, как *простейший закон подобия* (в формулировке В.Кирпичева-Барба-Кика): геометрически подобные и подобно нагруженные внешними силами тела из одного и того же материала получают одинаковые напряжения и относительные деформации, если все силы p пропорциональны квадратам линейных размеров l .

Если воспроизведение на модели деформаций не входит в задачу моделирования разрушения пород вокруг выработки, можно пренебречь воспроизведением в модели деформационных параметров и E , условие подобия по напряжениям будет в простейшем виде выглядеть в виде

$$\left(\frac{p}{\sigma l^2} \right) = const, \quad (4.58)$$

где под σ понимают все величины с размерностью напряжений, в том числе и все прочностные показатели породы.

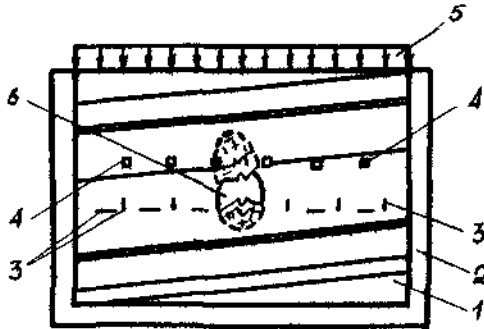


Рисунок 4.14 – Стенд модели из эквивалентных материалов: 1 – модель массива из эквивалентных материалов; 2 – каркас стенда; 3 – динамометры трения; 4 – марки для фотофиксации; 5 – вертикальный пригруз; 6 – горная выработка.

Для моделирования эквивалентными материалами применяют **плоские и объемные стенды**. Стенд представляет из себя металлический каркас, где размещают (методом послойного закатывания) эквивалентный материал, имитирующий горный массив со всеми его главными структурными особенностями строения (рис. 4.14). Если моделирование предусматривает использование пригруза, то на стенде монтируются нагрузочные приспособления.

Все **наблюдения и измерения**, применяемые при испытаниях моделей при исследовании процессов проявлений горного давления, сводится к следующим видам:

1. Фиксация **внешних** признаков разрушений и смещений горных пород и крепи (визуально, кино- и фотосъемкой и др.).

2. Измерение **абсолютных** смещений пород для изучения развития исследуемых процессов в пространстве (путем фотофиксации марок на модели, с помощью зеркальных тензометров ДПИ, шкаловых микроскопов, индикаторов часового типа с ценой деления 0.01 мм).

3. Измерение **относительных** смещений различных пар точек, расположенных в характерных местах модели (с помощью различного типа деформометров).

4. Оценка **напряженного** состояния пород или его изменений (посредством различного рода геофизических методов исследований: электрометрия, геофоны, ультразвук; с помощью микродинамометров, деформаторов, датчиков давления и др.).

5. **Измерение усилий**, испытываемых элементами крепи (посредством различных динамометрических устройств).

Метод эквивалентных материалов позволяет воспроизводить в модели различное строение толщи пород и изучать в достаточном приближении к натуре все основные горнотехнические операции по выемке горной массы и креплению горных выработок.

4.5.5. Метод центробежного моделирования

При изучении процессов в горном массиве, происходящих в основном под действием сил тяжести, согласно (4.56) для моделей из материала природы, когда $\alpha_E \approx 1$, необходимо добиться соблюдения трудновыполнимого условия: для моделей, уменьшенных в $1/\alpha_\ell$ раз против природы, во столько же раз должны быть увеличены объемные силы (докажите это, исходя из критериев (4.56)!).

Для нагружения силами тяжести подобное условие можно

осуществить методом **центробежного** моделирования, в котором путем центрифугирования моделей заменяют объемные силы тяжести объемными силами инерции.

Сущность метода заключается в том, что масштабную модель выделенной области породного массива с выработкой помещают **на центрифугу**, с помощью которой обеспечивается соблюдение критериев механического подобия (4.56) при определенной частоте вращения в соответствии с принятым масштабом. При это модель вращают с ускорением a , превышающим естественное ускорение силы тяжести g в $1/\alpha_\ell$ раз (докажите, почему?).

Метод используют для изучения распределения напряжений вокруг горной выработки, осадки сооружений, устойчивости откосов и других задач.

4.5.6. Метод электрогидродинамических аналогий (ЭГДА)

Метод аналогии основан на сходстве математического описания многих процессов, происходящих в природе. Метод ЭГДА основан на **математической аналогии** законов стационарного движения электрического тока в проводящей среде с процессами фильтрации жидкости в пористых и трещиноватых породах, диффузии газа и жидкости, распространение тепловых потоков, магнитных, электрических, звуковых и взрывных волн, распределения напряжений в конструкциях и т.д. Так, движение электрического тока подчиняется закону Ома, а его аналогами являются: при фильтрации жидкости закон Дарси, при распространении магнитного поля - закон магнитной индукции, а температурного поля - закон Фурье. Критерии подобия позволяют установить необходимое соответствие между величинами электрических параметров и величинами-аналогами. Сам процесс моделирования осуществляют на установке ЭГДА. На кафедре СШ и ПС ДГМИ разработана новая блок-схема прибора ЭГДА на базе серийного выпускаемого шахтного газоанализатора "Сигнал-2" (рис. 4.15).

Прибор ЭГДА состоит из блока стабилизированного источника питания 3, который с помощью шнура 2 подключен к розетке 1 электросети напряжением 220 В. С помощью переключателя 5 включают блок 3 и регулируют питание, выходное напряжение подается переключателем 4 и снимают с клемм 6. Вольтметры 7 и 8 позволяют следить за напряжением соответственно в сети и на выходе источника питания 3. Проводами 10 напряжение подается к шинам 11

и 12 модели 9 из электропроводной бумаги. Поисковая игла (щуп) 13 для построения эквипотенциальных линий и шина 12 подключены к клеммам 14 высокоомного цифрового вольтметра 15. Показания считываются по цифровому индикатору 16. Вольтметр включают переключателем 17.

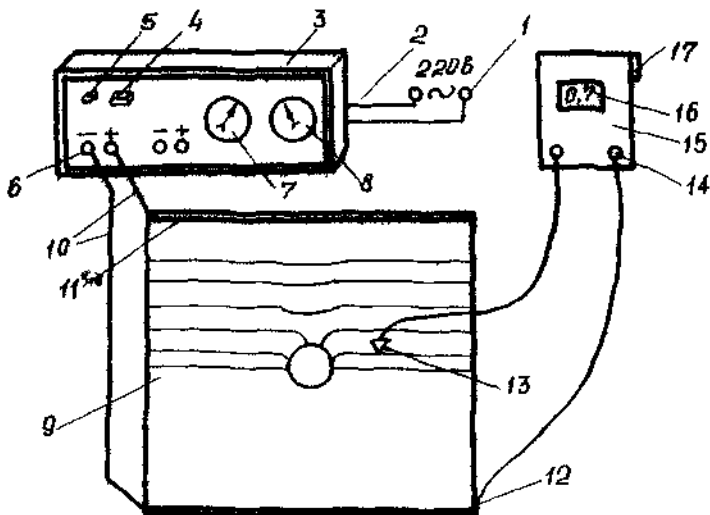


Рисунок 4.15 – Установка для моделирования методом ЭГДА на электропроводной бумаге

В качестве *материалов моделей* применяют в зависимости от поставленной задачи исследования различные электропроводные материалы, обладающие как электронной, так и ионной проводимостью: жидкости, студни и желеобразные массы, электролиты, увлажненные порошкообразные смеси, коллоидный графит, станиоль-алюминиевая фольга, электропроводная бумага (ЭПБ) или пропитанный электролитами картон.

Удобно электрическую модель граничной задачи изготовлять из различных по проводимости сортов ЭПБ, вырезанных по форме, геометрически подобный участку массива в натуре.

При моделировании поисковой иглой 13 проводят эквипотенциальные линии, которые являются аналогами

соответствующих параметров в натуре.

Моделирование методом ЭГДА дает возможность изучать закономерности следующих физических процессов горного производства:

а) краевые задачи по **напряженно-деформированному** состоянию горных пород (распределение напряжений вокруг выработок произвольной формы, условия устойчивости и разрушения породных обнажений, взаимодействие различных типов крепи с массивом, напряженное состояние целиков, потолочин, бортов карьеров и т.д.);

б) задачи **взрывного воздействия** на горные породы с использованием гидродинамической теории взрыва: сейсмическое действие взрывных работ на горные выработки, параметры камуфлетного взрыва и взрывной разгрузки пород вокруг выработки и т.д.;

в) задачи **подземной термодинамики** (одномерные плоские установившиеся задачи о нахождении комплексного потенциала температур, задачи замораживания от хладоисточника, определение радиуса ледопородного тела, параметры растаивания ледопородных ограждений, границы оттаивания и разрушения вечномерзлых пород вокруг выработок, задачи термобурения и т.д.);

г) задачи **подземной гидро- и газодинамики** (стационарные поля фильтрации газа и жидкости: задачи осушения массивов и строительных площадок, инъекционное упрочнение и водоподавление вокруг выработок; контроль качества работ реометрическим методом и водопоглощением, задачи влагопереноса при размокании пород вокруг выработок, предварительная дегазация пластов и др.);

д) задачи интроскопии горных пород электрическими и магнитными полями (обоснование параметров электроемкостных и магнитных преобразователей, закономерности распределения электрического и магнитного полей в массиве вокруг выработок, контроль состояния пород с диэлектрической неоднородностью и анизотропией и др.)

4.5.7. Другие методы моделирования

Метод структурных моделей применяют при изучении процессов, протекающих в дискретной среде, составленной из системы блоков (сыпучий, разрушенный или блочный массив). Этим методом изучаются на плоских или объемных моделях условия устойчивости

породных обнажений, взаимодействие боковых пород с крепью выработок, образование сводов естественного равновесия. Модели состояются из набора различных систем заранее заготовленных структурных блоков. Эти блоки сохраняют при проведении испытаний моделей неизменными свою форму, размеры и физические свойства. Горное давление проявляется в виде различных поворотов и скольжений блоков друг относительно друга. В методе обеспечивается приближенное соблюдение условий подобия.

Метод структурных блоков удачно дополняет метод эквивалентных материалов и делает наглядными и доступными для изучения сложные процессы горного давления в несвязных трещиноватых породах.

Метод моделирования на вальцмассе позволяет достаточно просто изучать смещения пород вокруг выработок и судить об их напряженно-деформированном состоянии. На модель из вальцмассы (податливого упругого материала) наносится сетка, которая деформируется при нагружении модели. Измеряя искажения сетки, можно судить о концентрации деформаций вокруг выработок.

Как правило, исследуются плоские модели, а изменения в геометрии сеток фиксируют либо простым измерением с помощью шкалового микроскопа, либо путем их фотофиксации.

Электрические сеточные модели основаны на применении машин-аналогов специального типа (резистивных сеточных электроинтеграторов) для изучения процессов в массиве, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. По сути, этот метод эквивалентен методу ЭГДА, однако решение проводится на аналоговых ЭВМ.

В настоящее время сеточные модели не применяются и заменяются **аналитическим** моделированием на цифровых ЭВМ, на которых исследования проводят численными методами. Математическое моделирование является одним из наиболее перспективных методов, область применения которого ограничена только возможностями применяемой ЭВМ.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ к самостоятельной работе студентов

I. Пополните свои знания, изучив материал и законспектировав разделы учебников:

1. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика подземных сооружений и конструкции крепей. - М.: Недра, 1984. - с. 66-70, 90-93, 118-125, 127-131, 148-153, 165-166, 171-173.

2. Насонов И.Д. Моделирование горных процессов. - М.: Недра, 1978. - с. 3-10, 26-28, 36-37, 50-58, 64-68, 88-89, 222-228.

3. Литвинский Г.Г. Методические рекомендации к лабораторной и научно-исследовательской работе "Аналоговое моделирование процессов нагнетания тампонажного раствора в массив". - ДГМИ; 1990. - 19 с.

II. Проверьте свои знания, ответив на вопросы и выполнив контрольные задания:

1. Приведите примеры крепи с различными деформационно-силовыми характеристиками и изменяющимся режимом работы.

2. Оцените жесткость К крепи, работающей в упругой стадии. Какова ее работоспособность?

3. Сравните работоспособность абсолютно податливой и жесткой крепей (для реальных конструкций).

4. Какова роль крепи при упругих деформациях массива горных пород? Может ли крепь предотвратить начало разрушения пород?

5. Какие факторы влияют на распределение внешней нагрузки на а) жесткую, б) податливую крепь?

6. Дайте критический анализ ранее существовавших гипотез свода естественного равновесия.

7. В чем недостатки формулы Янсена-Кеттера (4.11) для определения нагрузки на крепь? Как их можно устранить?

8. Объясните общие закономерности формирования нагрузки на крепь при сводообразовании?

9. Как можно улучшить расчетную схему ДГМИ сводообразования вокруг выработки?

10. В чем особенности упрощенной расчетной схемы взаимодействия крепи с ЗНД? Каковы исходные данные и что следует определить?

11. Перечислите уравнения для решения задачи об образовании ЗНД вокруг выработки.

12. Каковы граничные условия в расчетной схеме

взаимодействия крепи с ЗНД?

13. Как решается задача об образовании идеально-пластической ЗНД? Какова при этом роль крепи?

14. Приведите решение Р.Феннера задачи об образовании ЗНД в идеально-сыпучей среде.

15. Объясните особенности решения А.Лабасса об образовании ЗНД в идеально-связной среде. В чем его недостаток? Как его исправил проф. Либерман Ю.М.?

16. Сформулируйте закономерности взаимодействия крепи с породами ЗНД. Укажите, в чем они отличаются от закономерностей при образовании сводов естественного равновесия.

17. Выполните с помощью ПЭВМ анализ итоговых формул о смещениях пород в выработках при разных моделях горных пород. Постройте графические и реальные смещений пород в выработку.

18. Укажите, в чем сходство и в чем различаются различные виды моделей объекта или процесса, - математическая, физическая, аналоговая?

19. В чем сущность теории размерности и ее π -теоремы?

20. Перечислите основные теоремы теории подобия?

21. Соблюдение каких условий однозначности необходимо обеспечить при моделировании?

22. В чем сущность моделирования методом эквивалентных материалов? Как выбираются критерии подобия?

23. Обоснуйте, когда необходимо применять метод центробежного моделирования?

24. Изложите сущность моделирования методом электрогидродинамических аналогий, какие процессы им удобно моделировать?

25. Какие другие методы моделирования горных процессов могут быть использованы, какова их область применения?

III. Выполните лабораторные и исследовательские работы по изучению проявлений горного давления:

1. Изучите закономерности сводообразования в кровле выработки в зависимости от различных систем трещин и напряженного состояния массива на трибометрическом стенде.

2. Воспроизведите процессы выдавливания слоистых пород в выработку на модели из эквивалентных материалов.

3. Проверьте фундаментальные закономерности разрушения пород вокруг выработки от растягивающих и сжимающих напряжений

на модельных блоках.

4. Определите нагрузку на податливую крепь ствола в сыпучей среде с помощью датчиков трения.

5. Определите нагрузку на податливую крепь горизонтальной выработки в сыпучей среде.

6. Методом ЭГДА на электропроводной бумаге изучите распределение напряжений вокруг выработок различной формы.

IV. Изучите самостоятельно и с помощью консультаций преподавателя внепрограммный материал:

1. Сопоставить деформационно-силовые характеристики и работоспособность различных типов крепи.

2. Расчетные схемы проявлений горного давления при развитии разрушений пород от напряжений различных знаков.

3. Влияние жесткости деформационно-силовой характеристики крепи на смещения пород в выработку.

4. Влияние неосесимметричных факторов на формирование ЗНД вокруг выработки и развитие проявлений горного давления.

5. Развитие проявлений горного давления в выработке с учетом фактора времени.

6. Определение смещений пород в выработку с учетом геометрической нелинейности (проблема больших смещений).

7. Выбор критериев оптимизации взаимодействия крепи с массивом горных пород.

Таблица 4.1 – Результаты решения задач о взаимодействии крепи с ЗНД

Модель среды в ЗНД	Напряжения в ЗНД $a \leq r \leq r_*$	Радиус ЗНД r_* и смещения пород u в ЗНД	Отпор податливой крепи q смещения контура u_a
1. Сыпучая $F_n = \sigma_\theta - A\sigma_r = 0$ (Р. Феннер)	$\sigma_r = q \left(\frac{r}{a}\right)^{A-1}$ $\sigma_\theta = Aq \left(\frac{r}{a}\right)^{A-1}$	$r_* = a \left[\frac{2p}{(A+1)q} \right]^{\frac{1}{(A-1)}}$ $u = \frac{r}{2G} (p - \sigma_r^*) \left(\frac{r_*}{r}\right)^{A+1}$	$q = \frac{2p}{A+1} \left(\frac{a}{r_*}\right)^{A-1}$ $u_a = a \frac{A-1}{A+1} \frac{p}{2G} \left[\frac{2p}{(A+1)q} \right]^{\frac{A+1}{A-1}}$
2. Идеально-пластичная $F_n = \sigma_\theta - \sigma_r - 2k = 0$	$\sigma_r = q + k \ln \frac{r}{a}$ $\sigma_\theta = q + k \ln \frac{r}{a} + 2k$	$r_* = a \exp \frac{p-k-q}{2-k}$ $u = \frac{p - \sigma_r^*}{2G} \cdot \frac{r_*^2}{r}$	$q = p - k - 2k \ln \frac{r_*}{a}$ $u_a = a \frac{p+k-q}{4G} \exp \frac{p-k-q}{k}$
3. Идеально-вязкая $F_n = \sigma_\theta - A\sigma_r - \sigma_{сж} = 0$ (А. Лабасс)	$\sigma_r = (q+c) \left(\frac{r}{a}\right)^{A-1} - c$ $\sigma_\theta = A(q+c) \left(\frac{r}{a}\right)^{A-1} - c$	$r_* = a \left[\frac{2(p+c)}{(A+1)(q+c)} \right]^{\frac{1}{(A-1)}}$ $u = \frac{p - \sigma_r^*}{2G} r \left(\frac{r_*}{r}\right)^{A+1}$	$q = \frac{2(p+c)}{A+1} \left(\frac{a}{r_*}\right)^{A-1} - c$ $u_a = a \frac{A-1}{A+1} \frac{p}{2G} \left[\frac{2(p+c)}{(A+1)(q+c)} \right]^{\frac{A+1}{A-1}}$
4. Вязкая, после разрушения сыпучая $F_n = \sigma_\theta - A\sigma_r = 0$ (проф. Ю.М. Либерман)	$\sigma_r = q \left(\frac{r}{a}\right)^{A-1}$ $\sigma_\theta = A \left(\frac{r}{a}\right)^{A-1}$	$r_* = a \left[\frac{2p - \sigma_{сж}}{(A+1)q} \right]^{\frac{1}{(A-1)}}$ $u = \frac{p - \sigma_r^*}{2G} r \left(\frac{r_*}{r}\right)^{A+1}$	$q = \frac{2p - \sigma_{сж}}{A+1} \left(\frac{a}{r_*}\right)^{A-1}$ $u_a = a \frac{A-1}{A+1} \frac{p}{2G} \left[\frac{2p - \sigma_{сж}}{(A+1)q} \right]^{\frac{A+1}{A-1}}$

5. С постепенным
разрушением
 $F_n = \sigma_\theta - (\mu + 1)\sigma_r = 0$
(проф. Г.Г. Литвинский)

$$\sigma_r = q \left(\frac{r}{a} \right)^\mu$$

$$\sigma_\theta = (\mu + 1)q \left(\frac{r}{a} \right)^\mu$$

$$r_* = a \left[\frac{2p - \sigma_{сж}}{(\mu + 2)q} \right]^{\frac{1}{\mu}}$$

$$u = \frac{p - \sigma_r^*}{2G} r \left(\frac{r_*^2}{r} \right)^{\frac{\mu + 2}{\mu}}$$

$$q = \frac{2p - \sigma_{сж}}{\mu + 2} \left(\frac{a}{r_*} \right)^{\frac{1}{\mu}}$$

$$u_a = a \frac{\mu}{\mu + 2} \frac{p}{2G} \left[\frac{2p - \sigma_{сж}}{(\mu + 2)q} \right]^{\frac{\mu + 2}{\mu}}$$