

ТЕОРИЯ СТРУКТУРНОГО СТРОЕНИЯ ТРЕЩИНОВАТОЙ ПОРОДЫ

Г.Г. Литвинский, Донбасский государственный технический университет, Украина

Рассмотрены особенности образования трещин сдвига и разрыва при растяжении и сжатии материала в виде комплексных дефектов Z-типа. Показаны принципиальные различия таких дефектов в растягивающих и сжимающих полях напряжений. Предложена теория описания пространственного распределения сдвиговых и разрывных дефектов (поврежденности) с помощью матриц и теории множеств. Теория структурного строения может быть положена в основу теории напряженно-деформированного состояния трещиноватых и неоднородных сред, в первую очередь горных пород и массивов.

Введение

Основной проблемой в механике горных пород, так же как и в механике твердого деформируемого тела, является адекватное описание процессов деформации и разрушения материала при произвольном на него физическом воздействии. Горная порода, а тем более горный массив в целом, являются весьма сложными природными объектами, и изучение их механического поведения при ведении горных работ является важной научной проблемой, от решения которой зависит эффективность и безопасность ведения горных работ.

Под воздействием внешних сил, приложенных к телу с дефектами, возникает напряженно-деформированное состояние, определение которого представляет собой весьма сложную, до сих пор нерешенную задачу механики твердого деформированного тела. В последнее время интенсивно проводились многочисленные теоретические и экспериментальные исследования свойств трещиноватых и дефектных горных пород и массивов с использованием феноменологических и физических представлений о взаимодействии дефектов. В учении о деформировании и разрушения материалов можно выделить три основных направления: феноменологические теории предельного состояния в локальной области, теории макротрещин и континуальные теории зарождения и роста дислокаций и дефектов.

В работах, использующих феноменологический подход [1-5 и др.] в физические уравнения среды вводится параметр поврежденности $0 \leq W \leq 1$, а в качестве критерия разрушения принимается условие достижения поврежденностью предельного значения $W = 1$. К недостаткам существующих феноменологических моделей следует отнести их слабую физическую обоснованность и искусственность принятых основных предпосылок. В частности, эти модели не позволяют четко интерпретировать физический смысл основного параметра, - поврежденности W , - и зачастую оказываются неприменимыми за пределами области базового эксперимента. Феноменологические модели не рассматривают механизмы роста и залечивания дефектов, с их помощью затруднительно оценить влияние объемного напряженно-деформированного состояния (НДС) материала на развитие в нём деформаций и разрушений и др.

Теория макротрещин (механика разрушения) представляет собой одну из ветвей учения о прочности материала, концентрирующую внимание на поведение макротрещины в теле, имеющем конкретные форму и размеры и определенным образом нагруженном. Исходными в этом направлении можно считать работы Гриффитса [6], где объектом исследования была единственная в теле трещина нормального разрыва. Проблема возникновения (зарождения) трещины здесь не решается, а изучаются лишь условия равновесного ее состояния.

Поэтому в последнее время стали развиваться континуальные теории дефектов (трещин, дислокаций). В них не следят за состоянием отдельного дефекта, а изучают модель сплошной квазиоднородной среды, содержащей ансамбль дефектов, под действием нагрузки. Первыми появились работы, посвященные вязкому разрушению металлов при постоянной растягивающей нагрузке в условиях ползучести [7]. Значительно дальше пошел Л.М. Качанов [1], который, по-видимому, впервые ввел понятие поврежденности материала W , возрастающей

при действии нагрузки. Поврежденность W трактовалась как мера потери сплошности материала от трещин растяжения, расположенных в плоскости разрушения, но конкретизации физической природы возникновения и развития трещин в этих работах не было. В работе [8] устранен этот пробел и сделана попытка установления закономерностей деформирования и разрушения хрупких материалов (горных пород) с позиций континуальной реономной микромеханики, основанной на учете кинетики возникновения и залечивания облака микродефектов, рассеянных по всему объёму материала.

Однако к настоящему времени назрела потребность в решении актуальной научной задачи более глубокого теоретического описания структурного строения трещиноватого материала (горной породы и массива), что позволит перейти к изучению НДС и механического поведения таких сложных природных объектов, как горный массив и слагающие его породы.

1. Общие понятия поврежденности

В процессе генезиса и последующего существования горные породы претерпевают различные внешние воздействия и меняют свою текстуру и структуру, что сопровождается возникновением трещин и других дефектов, обобщённо называемых поврежденностью строения, т.к. материал всё более удаляется от однородного (гомогенного) состояния и становится неоднородной (гетерогенной) системой. Задача состоит в том, чтобы дать формальный метод описания такой неоднородности, для чего удобно использовать понятие поврежденности. Под поврежденностью материала будем понимать возникновение в нём любых дефектов, вызывающих нарушение его сплошности и изменение НДС.

В идеально изотропном и однородном материале под действием внешней нагрузки на площадках с максимальными касательными напряжениями зарождаются под углом 45° к главным площадкам начальные сдвиговые дисторсии (сдвиги), которые представляют собой трещины с прижатыми и антисимметрично сдвинутыми вдоль касательных напряжений берегами. Если ввести ортонормированную систему координат с единичными ортами $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$, то совокупность таких сдвигов будем обозначать W_{ij} (где $\underline{i}, \underline{j}$ - обозначают диагональ между главными площадками с нормальными $\underline{i}, \underline{j}$)

Помимо сдвигов W_{ij} существуют еще и дефекты типа нормальных разрывов, которые будем обозначать W_{ii} . Таким образом, вводится система дефектов типа сдвигов W_{ij} и разрывов W_{ii} (где $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k} = 1, 2, 3$ с круговой перестановкой). Следует отметить, что большинство известных континуальных теорий микродефектов ограничиваются рассмотрением возникновения в теле лишь трещин разрыва.

Используя в качестве основных объектов исследований микродефекты W_{ij} и представляя их в виде матрицы поврежденностей $\|W_{ij}\|$, можно дать им следующую физическую интерпретацию:

а) микродефекты сдвиговой природы (“сдвиги”) $W_{ij} = W_{ji}$, (когда $\underline{i} \neq \underline{j}$) появляются на площадках действия максимальных касательных напряжений аналогичных индексов \underline{t}_{ij} ;

б) микродефекты разрывной природы (“разрывы”) $W_{ii} > 0$, которые находятся на главных площадках с нормалью \underline{i} , ($\underline{i} = 1, 2, 3$) и эквивалентны трещинам растяжения.

Общее представление о пространственной ориентации микродефектов W_{ij} можно получить из рис. 1.

Важно обратить внимание на характерные конфигурации разрывных и сдвиговых дефектов при растяжении и сжатии элементарного объема породы. Экспериментальное и теоретическое подтверждение возникновения таких конфигураций можно найти в ряде исследований, проведенных отечественными и зарубежными учеными [5, 9-11 и др.]. Было установлено, что при сжатии хрупких материалов вначале возникают сдвиговые микродефекты, а затем на их концах зарождаются и растут трещины нормального разрыва, которые в процессе своего развития быстро приближаются к направлению, параллельному сжимающим усилиям. Отсюда можно заключить, что при нагружении материала возникает особое структурное Z-типа комплексное повреждение в виде естественно возникающей комбинации (объединения) сдвигов и разрывов. Как показывает более глубокий анализ физических процессов развития

сдвиговых дефектов при нагружении, Комбинация трещин Z-типа наблюдается и при нагружении тела растягивающими напряжениями, однако соотношение размеров сдвиговых и отрывных трещин будет противоположным случаю сжатия материала.

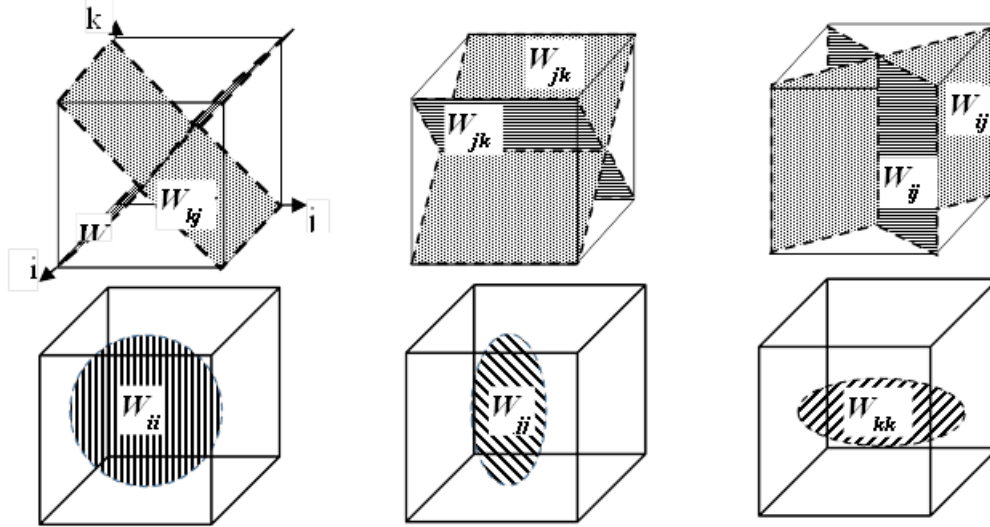


Рис.1. Основные направления возникновения сдвиговых W_{ij} и разрывных W_{ii} дефектов

Таким образом, в зависимости от знака приложенных напряжений, соотношения между сдвигами и разрывами в комплексном дефекте Z-типа будут существенно отличаться. По сути, это будут различные Z-дефекты, хотя и с одинаковыми по строению составляющими. При разрыве обычно центральный первичный сдвиг имеет малую длину и оперяется двумя разрывами большой длины, переходящими при разрушении в бегущую трещину отрыва. При

сжатии соотношение длин оказывается обратным (по крайней мере, на начальных этапах нагружения).

На рис. 2 представлены совокупности дефектов Z-типа для растяжения и сжатия материала. И в том, и в другом случае первичными по возникновению являются сдвиговые дефекты, зарождающиеся на площадках с максимальными касательными напряжениями. Это правило действует даже при чистом растяжении, поскольку для первичного образования разрывов требуется, как следует из теоретических решений, очень высокий уровень растягивающих напряжений порядка 10% от модуля упругости материала.

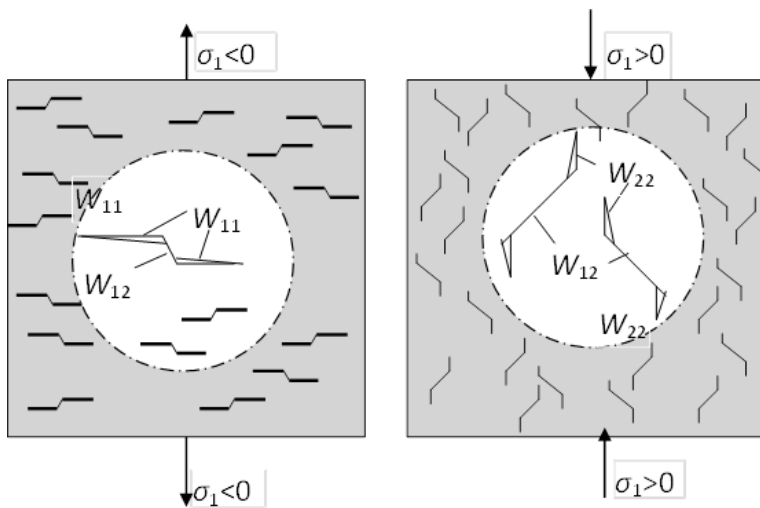


Рис. 2. Характерные конфигурации разрывных W_{ii} и сдвиговых W_{ij} поврежденностей при растяжении ($\sigma_{ii} < 0$) и сжатии ($\sigma_{ii} > 0$) элементарного объема породы

Такие устойчивые комбинационные сочетания сдвиговых и разрывных трещин, несмотря на кажущуюся простоту, вызывают чрезвычайно сложное НДС в материале с краевыми сингулярностями и большой вариативностью. Поэтому любые попытки решения краевой задачи теории упругости, а тем более пластичности, о закономерностях НДС в окрестности таких сложных пространственных объектов наталкиваются на непреодолимые трудности, в первую очередь ввиду явных проявлений эффектов геометрической и физической нелинейности.

Видимо, перспективным направлением решения проблемы следует считать континуальный подход описания всего ансамбля трещин в целом.

2. Возможные типы деформаций на Z-микродефектах

В рамках теории дислокаций и линейной механики разрушения [10, 12, 13] достоверно установлено, что следует различать три типа возможных деформаций в переходной области от бездефектной части тела к дефектам: I – нормальный отрыв, II – продольный сдвиг, III – поперечный сдвиг; при наложении этих основных элементарных деформаций можно наблюдать и более сложный тип IV – совместные сдвиговые деформации II- и III-типа.

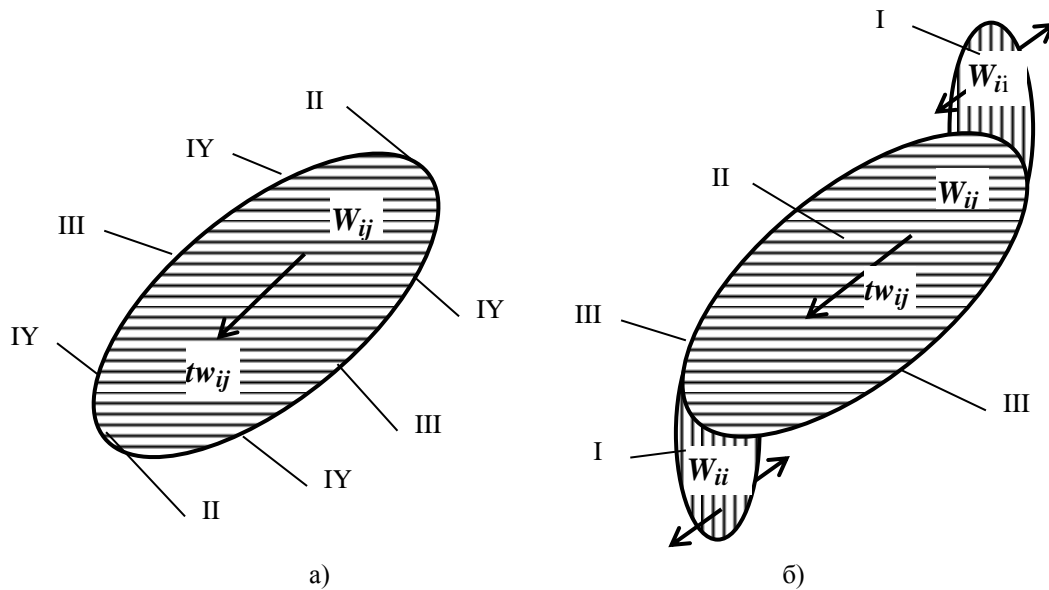


Рис. 3. Элементарные деформации в окрестности а) плоского микросдвига и б) комплексной поврежденности типа Z-дефекта

Как видно из рис. 3, даже простейший микросдвиг, часто в теории трактуемый как плоский, как правило, таким не является и только его передняя и задняя кромки, ограничивающие смещение, могут приближаться к условиям деформации II типа продольного сдвига. На продольных участках кромок этого микросдвига проявляются деформации поперечного сдвига, т.е. III тип, а на переходах от передних к продольным кромкам происходит наложение продольного и поперечного сдвигов в разных пропорциях, т.е. здесь наблюдается комбинация II и III типов сдвигов.

Если перейти к рассмотрению более сложного структурного нарушения материала – Z-дефекта, то различные краевые участки Z-дефекта подвержены сразу всем трём видам элементарных деформаций и их различным комбинациям: I - нормальный отрыв; II - продольный и III - поперечный сдвиги, причём комбинированные деформации занимают доминирующее положение. Коэффициенты интенсивности напряжений для каждого типа деформаций изучены в рамках линейной механики разрушения [10] и тракуются как функции приложенных нагрузок, геометрии тела и типа трещины. Внимание почти всех авторов было сосредоточено на изучении напряженно-деформированного состояния вокруг трещин нормального разрыва, как наиболее простом объекте. Из области их внимания выпали вопросы образования и развития произвольно ориентированных дефектов сдвигового характера и Z-типа, тем более задача определения НДС в их окрестности.

Исходя из необходимости решения таких сложных задач механики структурно неоднородного материала, следует рассматривать всю совокупность рассеянных по телу дефектов, разделив их на первом этапе на 2 класса – отрыва (растяжения) и сдвига.

3. Соотношения между микродефектами и сплошностями

Исходя из принятых обозначений для разрывных и сдвиговых дефектов можно всю их совокупность представить в виде симметричной матрицы:

$$W = \begin{vmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{vmatrix} \quad (1)$$

где $W_{ij} = W_{ji}$ – трещины сдвига, ориентированные вдоль максимальных касательных напряжений;

W_{ii} – трещины отрыва, лежащие в плоскости с нормалью i .

Помимо понятий поврежденностей (типа сдвига и разрыва) полезно ввести понятие сплошности, которое характеризуют бездефектную часть рассматриваемой площади материала. Для каждого заданного направления i, j в качестве сплошности примем:

$$T_{ij} = 1 - W_{ij} \quad (2)$$

Таким образом, симметричная матрица T_{ij} также содержит шесть структурных объектов в объеме тела, характеризующих сплошности $T_{ij} = T_{ji}$, из которых три (при $i \neq j$) – на диагональных плоскостях с максимальными касательными напряжениями, а остальные три (при $i = j$) – сплошности на главных площадках, компланарно которым расположены разрывные дефекты.

$$T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Вся совокупность дефектов представляет собой объекты, не обладающие тензорной природой, которые, однако, подчиняются закономерностям теории множеств. Используя эти закономерности, можно определить размеры оставшейся полной сплошности материала на каждой главной площадке по формулам:

$$Tt_k = T_{kk} * T_{kl} * T_{km}, \quad (k, l, m = 1, 2, 3) \quad (4)$$

Полные сплошности Tt_k имеют простую физическую интерпретацию: они показывают относительную площадь главной площадки, свободную от каких-либо поврежденностей (дефектов) W_{ij} . Поэтому логично ввести еще одно понятие – общую поврежденность Ww_k как относительную площадь, на которой находится хотя бы один дефект. Таких объектов будет также три по числу главных площадок:

$$Ww_k = 1 - Tt_k, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (5)$$

4. К теории взаимодействия микродефектов

Микродефекты, как рассеянные в материале объекты, обладающие свойством случайного распределения по объему, могут, в соответствии с теорией множеств, образовывать различные совокупности при наложении друг на друга. Из анализа размещения сдвиговых и разрывных дефектов в материале следует, закономерность: пересекаются области лишь с теми

дефектами, один из индексов у которых совпадает. В самом общем случае в теле возникают следующие совокупности поврежденностей (рис. 4):

области с дефектами одной природы, где их наложение (перемешивание) с другими поврежденностями отсутствует;

области, где происходит пересечение множеств поврежденностей лишь двух типов $W_{ii} \cap W_{ij}$; $W_{ij} \cap W_{ik}$, всего их число в теле не может быть более девяти;

области с максимально возможным пересечением множеств поврежденностей, а именно трех типов, $W_{ii} \cap W_{ij} \cap W_{ik}$ и $W_{ij} \cap W_{ik} \cap W_{kj}$, всего их число в теле не может быть более четырех;

области полной или частичной сплошности, полностью или частично свободные от поврежденностей, которые являются дополнением к тому или иному участку с заданным типом дефектов.

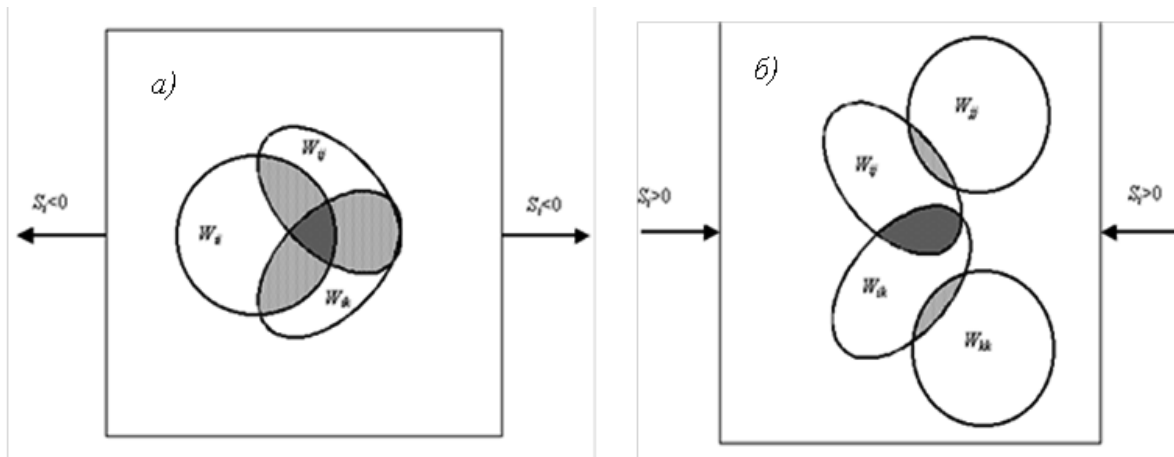


Рис. 4. Взаимодействие разрывных W_{ii} и сдвиговых W_{ij} , W_{ik} дефектов при нагружении тела по направлению i : а) растяжение; б) сжатие

Для каждого из видов напряженно-деформированного состояния тела характерны свои конфигурации поврежденностей.

На рис. 4а показан один из простейших случаев однородного напряженного состояния материала – одноосное растяжение. Условно показаны без соблюдения масштабов занимаемых площадей возникающие при растяжении дефекты. Таких совокупностей микродефектов будет всего три: дефекты разрыва W_{ii} на площадке с нормалью i , на которой действуют растягивающие напряжения $S_i < 0$, и микродефекты сдвига на примыкающих наклонных (под углом 45 градусов) площадках – W_{ij} и W_{ik} . Всего при одноосном растяжении материала будут существовать три площадки с однотипными микродефектами, три области с наложением двух типов дефектов и одна область, где пересекутся все три возникающих при растяжении микродефекта (один тип разрыва и два типа сдвига).

Более сложным является случай нагружения материала одноосным сжатием $S_i > 0$, в чем можно убедиться по рис. 4,б. Как следует из рассмотрения процессов возникновения и заживания микродефектов, здесь будут наблюдаться: а) четыре области с одним из микродефектов W_{jj} ; W_{kk} ; W_{ij} ; либо W_{ik} , и б) три области с пересечением двух типов микродефектов, у которых совпадает один из индексов, а именно, $W_{jj} \cap W_{ij}$; $W_{kk} \cap W_{ik}$ и $W_{ik} \cap W_{jk}$.

Как видно из проведенного анализа взаимодействия микродефектов различной природы и ориентации, существует принципиальная разница в распределении дефектов для сжатия и растяжения материала. Если при сжатии разрывные дефекты возникают параллельно действующему напряжению сжатия, то при растяжении они возникают только в плоскости, нормальной к направлению действия нагрузки. Очевидно, что и механизмы деформирования

и разрушения материала будут значительно отличаться. В общепринятой практике трактовки процессов неупругого поведения материалов (с позиций классических теорий пластичности и ползучести) таких различий не должно быть. На самом деле эти различия принципиальны и убедительно доказывают отсутствие подобия между даже простейшими случаями нагружения твердого тела, что требует введения поправок к существующим теориям деформирования материалов.

5. Численная оценка взаимодействия дефектов

Учитывая установленные закономерности наложения в объёме материала разной природы и пространственной ориентации микродефектов, можно получить ряд важных численных оценок. В первую очередь, следует обратить внимание на тот факт, что форма Z-дефекта не произвольна, а определяется действующим тензором напряжений и соотношением прочностных и деформационных показателей материала. Для одноосного сжатия размер разрывных трещин W_r , оперяющих передний и задний фронт продольных сдвигов, будет зависеть от наклона паспорта прочности материала, т.е. в конечном счёте, от угла внутреннего трения:

$$Wr = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{12} * F(f) & 0 \\ 0 & 0 & W_{13} * F(f) \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где функция $F(f)$ коэффициента $f = tg(\rho)$ угла внутреннего трения ρ определяется из выражения:

$$F(f) = \sqrt{0,5 * (\sqrt{1 + f^2} + f - 1)} \quad (7)$$

Теперь, опираясь на теорию множеств, можно численно оценить трёхкомпонентные матрицы общих повреждённости Ww_i и сплошности Tt_i по каждому направлению i, j, k в соответствии с выражением:

$$Ww = \begin{vmatrix} W_{11}(1 - W_{13} - W_{12} + W_{13}W_{12}) + W_{13} + W_{12}(1 - W_{13}) \\ W_{22}(1 - W_{21} - W_{23} + W_{21}W_{23}) + W_{21} + W_{23}(1 - W_{21}) \\ W_{33}(1 - W_{32} - W_{31} + W_{32}W_{31}) + W_{32} + W_{31}(1 - W_{32}) \end{vmatrix}, \quad (8)$$

$$Tt = \begin{vmatrix} T_{11}(1 - T_{13} - T_{12} + T_{13}T_{12}) + T_{13} + T_{12}(1 - T_{13}) \\ T_{22}(1 - T_{21} - T_{23} + T_{21}T_{23}) + T_{21} + T_{23}(1 - T_{21}) \\ T_{33}(1 - T_{32} - T_{31} + T_{32}T_{31}) + T_{32} + T_{31}(1 - T_{32}) \end{vmatrix}, \quad (9)$$

при соблюдении обязательного условия нормировки, вытекающего из физической природы рассматриваемых объектов $Tt_i + Ww_i = 1$.

В качестве численного примера рассмотрим горную породу, у которой угол внутреннего трения равен $\rho=30^\circ$ после предварительной нагрузки и разгрузки со случайным распределением по объёму микродефектов Z-типа, которые характеризуются следующими матрицами, соответствующими одноосному сжатию

исходная матрица продольных сдвиговых дефектов W на диагональных плоскостях и сплошности T

$$W_0 = \begin{vmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & 0 & 0 \\ W_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0 \end{vmatrix}; T = \begin{vmatrix} 1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,7 & 1 & 1 \\ 0,7 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

матрица разрывных дефектов Wr , оперяющих продольные сдвиговые дефекты

$$Wr = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{22} & 0 \\ 0 & 0 & W_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,155 & 0 \\ 0 & 0 & 0,155 \end{vmatrix}$$

полная матрица W всех элементарных повреждённости:

$$W = W_0 + Wr = \begin{vmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & 0 \\ W_{31} & 0 & W_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,155 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,155 \end{vmatrix};$$

и, наконец, общие повреждённости Ww и сплошности Tt на каждом главном направлении 1,2,3:

$$Ww = \begin{vmatrix} Ww_1 \\ Ww_2 \\ Ww_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,51 \\ 0,409 \\ 0,409 \end{vmatrix}; \quad Tt = \begin{vmatrix} Tt_1 \\ Tt_2 \\ Tt_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,49 \\ 0,591 \\ 0,591 \end{vmatrix}$$

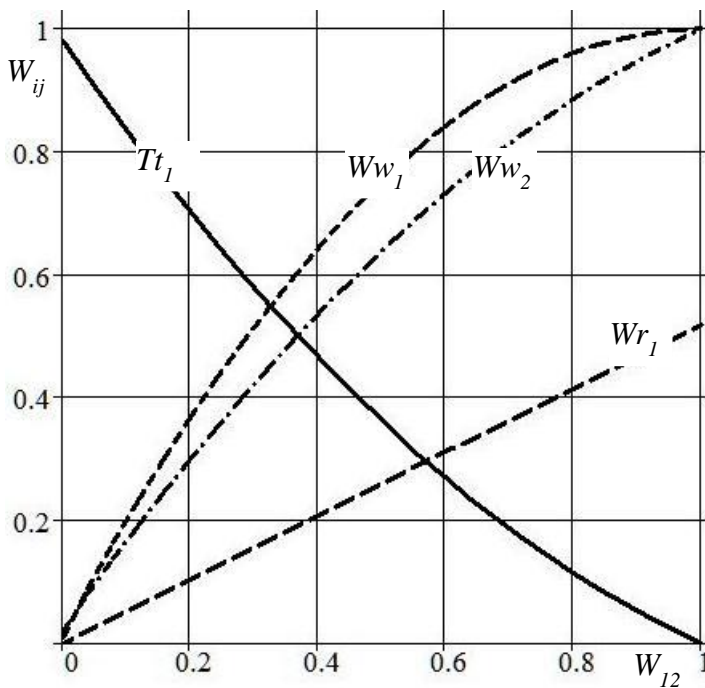


Рис. 5. Изменение дефектов отрыва Wr_1 , общих дефектов в теле Ww_1 и Ww_2 и сплошностей Tt_1 по мере роста сдвиговых дефектов W_{12} при $\rho = 20^0$

Таким образом, все необходимые данные о численных характеристиках распределения структурной нарушенности в виде распределения дефектов сдвигового и разрывного типа горной породы получены. Чтобы проследить закономерности изменения степени структурной нарушенности материала по мере увеличения относительной площади дефектов типа продольного сдвига W_{12} , были построены графики для основных показателей неоднородности материала (рис. 5).

Из графиков следует, что относительная площадь дефектов в виде трещин отрыва Wr_1 на концах комплексных дефектов Z-типа линейно возрастает по мере роста сдвиговых дефектов W_{12} . Это обусловлено постоянством исходных механических свойств материала, – соотношением когезии сдвига и отрыва. Однако общая степень нарушенности материала в виде обобщённой повреждённости Ww_1 и $Ww_2 = Ww_3$ изменяется нелинейно, что и представлено уравнениями (8) и (9).

Выводы

В результате выполненных исследований:

- на основе анализа процессов развития трещин при нагружении материала для описания его структурной нарушенности предложено использовать сочетание разрывных и сдвиговых дефектов в виде особой пространственной конфигурации Z-типа дефектов;
- показано существенное различие строения дефектов Z-типа для растяжения и сжатия;

- получены базовые теоретические зависимости по математическому описанию всей совокупности различного типа трещин в материале;
- дан анализ взаимодействия разрывных и сдвиговых дефектов разной пространственной ориентации и их возможного «перемешивания» и сочетания в объёме материала, показано принципиальное различие пересечения областей их расположения для растяжения и сжатия материала;

Таким образом, теория структурного строения трещиноватых материалов даёт достаточно детальное математическое описание произвольной трещиновой нарушенности горных пород и массивов и может быть использована для построения математической теории напряженно-деформированного состояния материалов со сложной структурной неоднородностью, обусловленной наличием в нём трещин и пустот, что особенно важно для решения геомеханических задач горного производства.

Список литературы

1. Качанов Л.М. Теория ползучести. - М.: Физматгиз, 1960. - 455 с.
2. Работнов Ю.М. Ползучесть элементов конструкций. - М.: Наука, 1966. - 452 с.
3. Дж. Боил, Дж. Спенс. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. - М.: Мир, 1986. - 360 с.
4. Parks D.M. Mechanics and Mechanisms of creep deformation and damage // Nuclear Engin. and Design. - 1987. - 105. P. 11-18.
5. Чижик А.А., Петреня Ю.К. Разрушение вследствие ползучести и механизма микроразрушения // Докл. АН СССР. - 1987. - 297, № 6. - С. 1313-1333.
6. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids // Philos. Trans. Roy. Soc. A., vol. 221, 1920, P. 103-198.
7. Hoff N.J. The necking and rupture of rods subjected to constant tensile loads. - J. Appl. Mech., vol. 20, № 1, 1953.
8. Литвинский Г.Г. К основам реономной микромеханики разрушения / В сб. науч. тр. ДГМИ. - Алчевск: ДГМИ, 1998. - С. 81-86.
9. Зайцев Ю.В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения. - М.: Стройиздат, 1982. - 195 с.
10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974. - 640 с.
11. Shah S.P., Winter G. Inelastic behavior and fracture of concrete. In: Causes, Mechanism and Control of Cracking in Concrete. - ACI Publication SP-20. - Detroit, 1968.
12. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел. - М.: Металлургия, 1971. - 264 с.
13. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения. - Киев: Наукова думка. 1988. - 488 с.